# LEÇONS

SUR

# QUELQUES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

## OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

**Traité d'Analyse** (Cours de la Faculté des Sciences). 4 volumes in-8 (25-16) se vendant séparément :

TOME I : In-8 de 593 pages, avec 38 figures. 3e édition revue et corrigée; 1922 ........................................ **800 fr.**

TOME II ........................................ (*Sous presse.*)

TOME III : In-8 de x-604 pages, avec 25 figures. 2e édition; 1928. **800 fr.**

## CAHIERS SCIENTIFIQUES

FASC. I : **Leçons sur quelques types simples d'Équations aux dérivées partielles, avec des Applications à la Physique mathématique**, par Émile PICARD, de l'Académie française, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, Professeur à l'Université de Paris. In-8 (25-16) de 214 pages, avec 73 figures, 1927 ........................................ (*Sous presse.*)

FASC. III : **Leçons sur quelques Équations fonctionnelles, avec des Applications à divers problèmes d'Analyse et de Physique mathématique,** par Émile PICARD, de l'Académie française, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, Professeur à l'Université de Paris. Rédigées par Eugène BLANC, Agrégé de l'Université. In-8 (25-16) de 184 pages, avec 61 figures, 1928 ........................................ **400 fr.**

FASC. V : **Leçons sur quelques Problèmes aux limites de la Théorie des Équations différentielles**, par Émile PICARD, de l'Académie française, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, Professeur à l'Université de Paris. Rédigées par Marcel BRELOT, ancien Élève de l'École Normale. In-8 (25-16) de 271 pages; 1930 ........................................ **600 fr.**

FASC. IX : **Quelques applications analytiques de la Théorie des courbes et des surfaces algébriques**, par Émile PICARD, de l'Académie française, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, Professeur à l'Université de Paris. Leçons rédigées par Jean DIEUDONNÉ, Agrégé de l'Université. In-8 (25-16) de VIII-224 pages; 1931 ........................................ **500 fr.**

CAHIERS SCIENTIFIQUES
PUBLIÉS SOUS LA DIRECTION DE M. GASTON JULIA.

FASCICULE III

# LEÇONS

SUR

# QUELQUES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

AVEC DES

## APPLICATIONS A DIVERS PROBLÈMES D'ANALYSE ET DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

PAR

**M. Émile PICARD**
de l'Académie ~~française~~,
Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences,
Professeur à l'Université de Paris

**rédigées par M Eugène BLANC**
Agrégé de l'Université

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins, 55
*Nouveau tirage*

1950

# LEÇONS

SUR

# QUELQUES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

AVEC DES

## APPLICATIONS A DIVERS PROBLÈMES D'ANALYSE ET DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

---

## CHAPITRE I.

### PREMIÈRES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES. ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE (¹)

---

### I. — L'ÉQUATION $f(x)+f(y)=f(x+y)$.

Une des premières équations fonctionnelles qui aient été étudiées, paraît être l'équation, déjà rencontrée par d'Alembert,

$$f(x)+f(y)=f(x+y), \tag{1}$$

où $x$ et $y$ désignent des valeurs arbitraires de la variable. Cauchy a, le premier, démontré que, *si l'on suppose la solution continue, elle est forcément de la forme*

$$f(x)=\mathrm{C}x,$$

C étant une constante arbitraire.

On peut, en effet, établir de proche en proche à partir de la relation (1), la relation

$$f(x_1)+\ldots+f(x_n)=f(x_1+\ldots+x_n)$$

qui devient

$$f(nx)=n\,f(x),$$

si l'on y fait

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=x.$$

---

(¹) Ce Chapitre a été résumé dans l'article suivant : É. PICARD, *Deux leçons sur certaines équations fonctionnelles et la géométrie non euclidienne* (*Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1922).

On aura ensuite par des transformations évidentes, $n$ et $p$ étant des entiers positifs,

$$n f\left(\frac{x}{p}\right) = f\left(n \frac{x}{p}\right),$$

$$p f\left(\frac{x}{p}\right) = f(x),$$

$$f\left(\frac{n x}{p}\right) = \frac{n}{p} f(x),$$

$$f\left(\frac{n}{p}\right) = \frac{n}{p} f(1),$$

de sorte que, pour toute valeur positive et commensurable de $x$, on a

$$f(x) = Cx,$$

quelles que soient d'ailleurs les hypothèses faites sur $f$. Si l'on suppose, en outre, que $f$ est continue, on aura évidemment

$$f(x) = Cx,$$

pour toute valeur positive de $x$.

On a d'ailleurs :

$$f(0) = 0,$$

puis

$$f(x) + f(-x) = f(0) = 0,$$
$$f(-x) = -f(x) = C(-x),$$

de sorte que la solution est

$$f(x) = Cx$$

pour toute valeur de $x$.

Deux cas, où l'on peut se passer de l'hypothèse de continuité, ont été indiqués par M. Darboux.

*Supposons que $f(x)$ soit constamment du signe de $x$.*

L'équation (1) montre que

$$f(x+y) = f(x) + f(y) > f(x) \quad \text{si } y > 0,$$

c'est-à-dire que $f(x)$ est croissante.

Soit alors $x$ une valeur incommensurable de la variable; on peut l'approcher par les nombres $\frac{p}{q}$ et $\frac{p+1}{q}$

$$\frac{p}{q} < x < \frac{p+1}{q}$$

on aura alors

$$\frac{p}{q} f(1) = f\left(\frac{p}{q}\right) < f(x) < f\left(\frac{p+1}{q}\right) = \frac{p+1}{q} f(1).$$

Comme on peut prendre des valeurs aussi approchées que l'on voudra, on voit que

$$f(x) = Cx.$$

*Si dans un intervalle $(\alpha, \beta)$ arbitrairement petit, la fonction est bornée en modules, on peut affirmer qu'elle est égale à $Cx$ pour toute valeur de $x$.*

Considérons, en effet, la fonction auxiliaire

$$\psi(x) = f(x) - x f(1).$$

On a

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) = 0,$$

et il est évident que $\psi$ satisfait elle-même à l'équation fonctionnelle (1) et reste bornée en même temps que $f$ dans l'intervalle $(\alpha, \beta)$. Donnons à $y$ dans cette équation une valeur commensurable; il vient

$$\psi(x + y) = \psi(x).$$

Étant donnée une valeur quelconque de $x$, on peut, par addition ou soustraction d'un nombre commensurable, obtenir une valeur comprise entre $\alpha$ et $\beta$. On voit donc que $\psi$ prend dans l'intervalle $(\alpha, \beta)$ toutes les valeurs qu'elle est susceptible de prendre. Supposons alors que $\psi$ puisse avoir des valeurs autres que zéro et soit

$$\psi(x_0) = a \neq 0,$$

nous aurons

$$\psi(\mu x_0) = \mu \psi(x_0) = \mu a,$$

$\mu$ étant un nombre commensurable quelconque; $\psi$ pourra donc prendre des valeurs arbitrairement grandes et ne pourra se trouver bornée dans $(\alpha, \beta)$. Ceci est contraire à l'hypothèse. On aura donc partout

$$\psi(x) = 0,$$
$$f(x) = x f(1).$$

Le cas général (étudié par Hamel et par M. Lebesgue) est beaucoup plus complexe. L'existence de solutions totalement discontinues a été montrée par M. Lebesgue [1].

A cette équation se rattache l'équation

$$f(x) f(y) = f(x + y).$$

---

[1] H. LEBESGUE, *Sur les transformations ponctuelles transformant les plans en plans* (*Académie des Sciences de Turin*, 1906-1907).

dont la résolution est immédiate. Il suffit de prendre les logarithmes pour se ramener à (1) et l'on trouve ainsi

$$f(x) = a^x.$$

Ce changement de fonction est d'ailleurs toujours possible puisque

$$f(x) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0.$$

## II. — L'ÉQUATION $f(x)+f(y)=f(x+y)$ ET LE PROBLÈME DE LA COMPOSITION DES FORCES.

En s'appuyant sur les résultats précédents, M. Darboux [1] a donné, de la règle de composition des vecteurs, une démonstration géométrique nécessitant un minimum d'hypothèses. Les hypothèses de départ sont les suivantes :

A. *Un système de vecteurs concourants en un point* O *admet une résultante unique et bien déterminée passant par* O. *L'opération* (addition géométrique) *qui fournit cette résultante est associative et commutative.*

B. *L'addition géométrique se réduit à l'addition algébrique pour des vecteurs ayant même direction.*

C. *La résultante forme avec les vecteurs un système invariable dans une rotation quelconque autour de* O.

Cette dernière hypothèse est, en somme, destinée à légitimer les raisonnements « par raison de symétrie ». Il en résulte :

1° *Que la condition nécessaire et suffisante pour que deux vecteurs aient une résultante nulle est qu'ils soient égaux ou opposés.*

2° *Que la résultante de deux vecteurs est située dans leur plan.*

Ceci posé : soient deux vecteurs P et Q. Nous prendrons pour $Ox$ et $Oy$ les supports respectifs de ces vecteurs; $Oz$ sera perpendiculaire au plan $xOy$ et supportera un vecteur unitaire U.

La résultante de U et P sera définie dans le plan $xOz$ par sa direction fonction uniquement de P :

$$x = z f(P).$$

[1] G. DARBOUX, *Bulletin des Sciences math.*, 1re série, t. IX, 1875, p. 281).

En composant avec Q cette résultante, on obtiendra la résultante totale des trois vecteurs ; cette résultante sera donc dans le plan

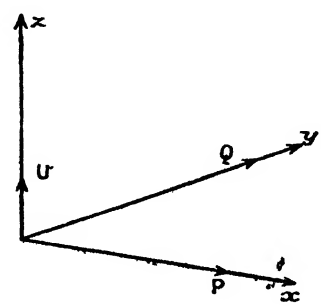
$$x = z f(P).$$

Elle sera pour la même raison dans les plans

$$y = z f(Q),$$
$$y = \mu x,$$

(dans la deuxième équation, $\mu$ définit la résultante de P et Q dans le plan $xOy$).

Fig. 1.




Ces trois plans devront être concourants, en vertu de l'hypothèse A, et l'on aura, par conséquent,

$$\mu = \frac{f(Q)}{f(P)}.$$

La direction de la résultante de P et Q est donc donnée par

$$\frac{y}{x} = \frac{f(Q)}{f(P)}.$$

Si l'on porte sur $Ox$ : $f(P)$ et sur $Oy$ : $f(Q)$, la résultante de P et Q aura même direction que la diagonale du parallélogramme construit sur $f(P)$ et $f(Q)$.

Soit $R_1$ la force opposée à la résultante R de P et Q. Les trois forces P, Q, $R_1$ ont une résultante nulle de sorte que chacune d'elles est en direction opposée à la résultante des deux autres.

Portons sur OP : $OA = f(P)$ ; sur OQ : $OB = f(Q)$ ; sur $OR_1$ : $OC = f(OR_1) = f(R)$ et construisons les parallélogrammes. $OR_1$ et OD ont même direction, ainsi que OA et OE.

On voit que

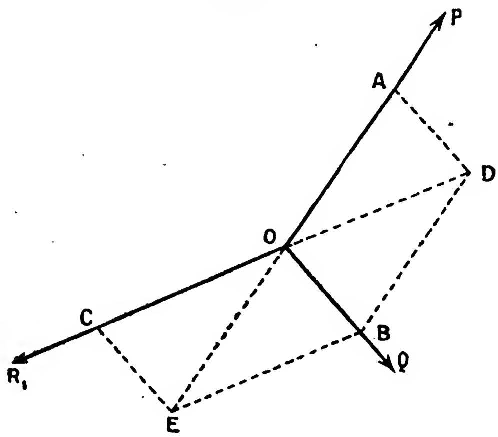
$$OD = BE = OC = f(R)$$

La diagonale du parallélogramme construit sur $f(P)$ et $f(Q)$ a pour valeur $f(R)$.

En vertu de l'hypothèse B, si les vecteurs P et Q ont même direction, on a

$$R = P + Q,$$

Fig. 2.




On a aussi

$$f(R) = OD = OA + OB = f(P) + f(Q),$$

et l'on voit que

$$f(P + Q) = f(P) + f(Q),$$

c'est précisément l'équation fonctionnelle (1).

Si l'on suppose $f$ continue (ce qui signifie que la résultante doit varier de façon continue en grandeur et direction avec P et Q) on sait que la seule solution est

$$f(P) = CP,$$

ce qui montre que la figure O, P, Q, R est homothétique dans le rapport C de la figure O, $f(P)$, $f(Q)$, $f(R)$, ou encore *que* R *est la diagonale du parallélogramme construit sur* P *et* Q.

## III. — L'ÉQUATION $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ ET LE PROBLÈME DE LA COMPOSITION DES FORCES ÉGALES DANS L'ESPACE EUCLIDIEN OU NON EUCLIDIEN.

1. Nous allons traiter maintenant sous un autre point de vue le problème de la composition des deux forces égales. Ce problème a conduit

Poisson ([1]) à l'équation fonctionnelle toute différente de la première,

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y). \tag{2}$$

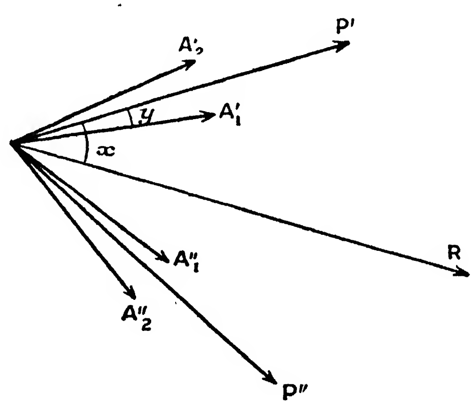
Les hypothèses de Poisson, bien que n'étant pas nettement formulées, sont, au fond, les mêmes que celles de Darboux.

Soient deux forces égales P portées par des droites faisant l'angle $2x$. D'après les hypothèses faites, la résultante sera dirigée suivant la bissectrice de l'angle des deux forces et aura pour valeur

$$R=f(P,\ x).$$

Des hypothèses A et B résulte que, si P est la somme de deux forces $P_1$

Fig. 3.




et $P_2$ ayant même direction, R sera la somme de la résultante $R_1$ des deux forces $P_1$ et de la résultante $R_2$ des deux forces $P_2$.

On a donc

$$f(P_1+P_2,\ x)=f(P_1,\ x)+f(P_2,\ x),$$

ce qui, d'après l'étude précédente, montre que

$$f(P,\ x)=f(1,x)P.$$

Avec un léger changement de notations nous pourrons écrire

$$R=2P\,f(x).$$

D'une façon générale il en sera de même dans tous les raisonnements qui vont suivre : chaque fois que nous aurons à exprimer une force par

([1]) *Traité de Mécanique*, t. I, 2ᵉ édition, p. 45.

une fonction arbitraire d'une seule autre force P, *la fonction arbitraire sera linéaire et homogène en* P.

Considérons maintenant P′ comme somme de deux forces égales $A'_1$ et $A'_2$ faisant avec P′ le même angle $y$. Faisons de même pour P″.

La valeur commune de $A'_1$, $A'_2$, $A''_1$, $A''_2$ sera $\dfrac{P}{2f(y)}$.

Composons $A'_1$ et $A''_1$ : la résultante vaut

$$R_1 = 2\frac{P}{2f(y)}f(x-y),$$

de même $R_2$ résultante de $A'_2$ et $A''_2$ vaut

$$R_2 = 2\frac{P}{2f(y)}f(x+y).$$

Mais d'après l'hypothèse A on a

$$R = R_1 + R_2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{P}{f(y)}[f(x+y)+f(x-y)] = 2P\,f(x)$$

et nous retombons sur l'équation fonctionnelle annoncée

$$f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y). \tag{2}$$

On connaît deux fonctions qui satisfont à cette équation : ce sont les fonctions $\cos ax$ et $\operatorname{ch} ax$. Nous verrons d'ailleurs qu'il n'en existe pas d'autres.

Si les forces font entre elles l'angle $\pi$, la résultante est nulle et l'on a

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Dans le cas actuel, seule la solution $\cos ax$ où l'on fait $a=1$ pourra convenir : on prendra donc

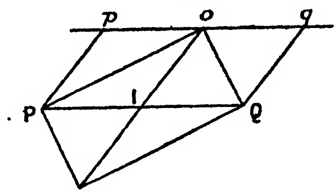
$$f(x) = \cos x,$$

ce qui, au point de vue géométrique, se traduit encore *par la règle du parallélogramme*. On peut maintenant étendre cette règle à des forces quelconques de la façon suivante.

Prenons pour commencer des forces rectangulaires :

Menons par O la parallèle à PQ et construisons les parallélogrammes OIP$p$, OIQ$q$ ; ce sont des losanges car OI = IP = IQ. On peut d'après ce qui précède remplacer OP par O$p$ et OI qui l'admettent comme résultante; de même OQ est remplacé par O$q$ et OI; O$p$ et O$q$ se détruisent, OI et OI admettent pour résultante OR, c'est-à-dire encore la diagonale du parallélogramme construit sur les deux forces.

Fig. 4.

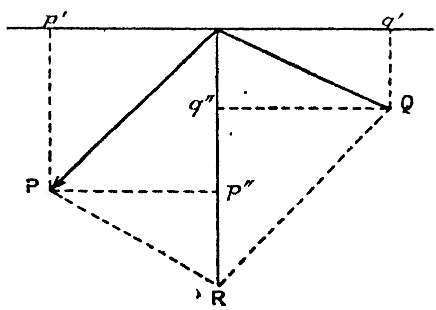



Passons à deux forces quelconques :

Construisons le parallélogramme OPQR et menons par O la perpendiculaire à OR.

On peut remplacer OP par O$p'$ et O$p''$ qui l'admettent comme résultante, et OQ par O$q'$ et O$q''$. Il résulte des propriétés géométriques évidentes de la figure que O$p'$ et O$q'$ se détruisent et que O$p''$ et O$q''$ ont pour résultante OR ce qui établit le résultat annoncé.

Fig. 5.




2. Passons maintenant à l'étude de l'équation elle-même :

On a d'abord, en y faisant $x = 0$,

$$2f(y) = 2f(0)f(y),$$
$$f(0) = 1;$$

puis, $\alpha$ étant une valeur numérique donnée de la variable, on a pour

$x = \alpha$ et $y = i\alpha$,

$$\text{(I)} \qquad f[(i+1)\alpha] = 2f(\alpha)f(i\alpha) - f[(i-1)\alpha] \qquad (i = 1, 2, \ldots, k, \ldots),$$

et pour $x = \frac{\alpha}{2^j}$, $y = \frac{\alpha}{2^j}$,

$$\text{(II)} \qquad \left[f\left(\frac{\alpha}{2^j}\right)\right]^2 = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{\alpha}{2^{j-1}}\right) + 1\right] \qquad (j = 1, 2, \ldots, k, \ldots).$$

Remarquons que, ces relations se déduisant uniquement du fait que $f$ satisfait à l'équation (2), et les fonctions $\cos ax$ et $\operatorname{ch} ax$ satisfaisant à cette équation (2) qui est leur formule d'addition bien connue en trigonométrie, ces fonctions (cos et ch) satisferont à (I) et (II). On aura par exemple, $\theta$ étant une valeur numérique de la variable,

$$\text{(I}'\text{)} \quad \cos[(i+1)\theta] = 2\cos\theta\cos(i\theta) - \cos[(i-1)\theta] \qquad (i = 1, 2, \ldots, k, \ldots),$$

$$\text{(I}''\text{)} \quad \operatorname{ch}[(i+1)\theta] = 2\operatorname{ch}\theta\operatorname{ch}(i\theta) - \operatorname{ch}[(i-1)\theta] \qquad (i = 1, 2, \ldots, k, \ldots),$$

et les relations (II$'$) et (II$''$) analogues à (II).

*a*. Supposons alors *qu'il existe une valeur positive $\alpha$ de la variable telle que l'on ait*

$$f(\alpha) < 1,$$

on pourra poser

$$f(\alpha) = \cos\theta,$$

et de la comparaison des groupes (I) et (I$'$) on déduira de proche en proche pour $m$ entier

$$f(m\alpha) = \cos m\theta.$$

On déduit de même, de la comparaison de (II) et de (II$'$),

$$f\left(\frac{\alpha}{2^p}\right) = \cos\frac{\theta}{2^p}.$$

En combinant ces deux égalités, on voit que

$$f\left(\frac{n}{2^p}\alpha\right) = \cos\frac{n}{2^p}\theta.$$

Si l'on suppose en outre que $f$ soit continue, comme une valeur incommensurable de $x$ peut être encadrée entre deux valeurs arbitrairement voisines de la forme $\frac{n}{2^p}$, on voit que l'on aura pour toute valeur de $x$

$$f(x\alpha) = \cos x\theta$$

ou

$$f(y) = \cos\frac{\theta}{\alpha}y = \cos a y \qquad (\text{avec } y = x\alpha).$$

Remarquons que nous sommes dans le cas du problème examiné tout à l'heure puisqu'on avait $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

*b*. Si l'on suppose au contraire *qu'il existe une valeur* $\alpha$ *de la variable telle que*

$$f(\alpha) > 1,$$

les autres hypothèses restant les mêmes, on pourra poser

$$f(\alpha) = \operatorname{ch}\theta;$$

un raisonnement exactement pareil montrera que

$$f(y) = \operatorname{ch}\frac{\theta}{\alpha}y = \operatorname{ch} a y$$

pour toute valeur de $y$.

Les deux solutions ainsi trouvées sont, avec la solution banale

$$f(x) = 1,$$

les deux seules que l'équation proposée admette sous les hypothèses faites.

3. La solution en cosinus hyperbolique trouve son emploi dans un problème de statique non euclidienne, où l'on est amené aussi à l'équation (2).

Rappelons certaines définitions et certains résultats de la géométrie de Lobatchewsky.

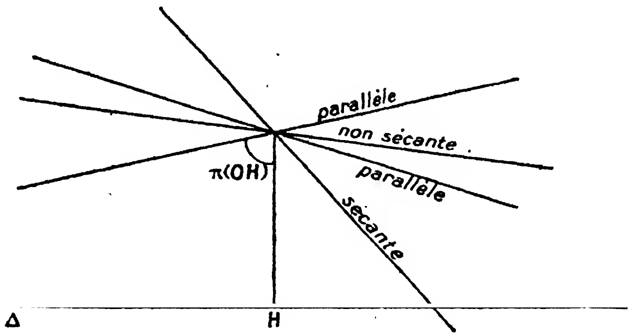
Dans cette géométrie, si l'on se donne une droite $\Delta$, les droites que l'on peut mener par un point O extérieur à $\Delta$ peuvent se partager en droites *sécantes* et *non sécantes* de $\Delta$. Ces deux catégories sont séparées par deux droites *parallèles* à $\Delta$.

Une droite D parallèle en un point à $\Delta$, conserve ce caractère en tous ses points et réciproquement $\Delta$ est parallèle à D.

La théorie de la mesure des angles est la même que dans la géométrie ordinaire.

Les lignes trigonométriques ordinaires ou hyperboliques sont définies par leurs développements en série habituels, de sorte que les relations connues entre ces lignes restent valables; le nombre $\frac{\pi}{2}$ est défini comme le plus petit zéro positif de la fonction $\cos x$; l'angle droit est un angle égal à $\frac{\pi}{2}$. L'angle formé par la perpendiculaire OH abaissée de O sur $\Delta$, avec une des parallèles menées par O à $\Delta$ dépend de la longueur OH. On

Fig. 6.




l'appelle angle de parallélisme et on le désigne par la notation $\pi$ (OH). Cet angle est inférieur à $\frac{\pi}{2}$. Il ne lui est égal que dans le cas de la géométrie euclidienne, les deux parallèles étant alors confondues.

Dans ces conditions, le problème de la composition de deux forces concourantes égales se résoudra exactement comme en géométrie euclidienne et nous serons conduits au même résultat. Par contre les raisonnements par lesquels on passe au cas général, ne sont plus valables car ils s'appuient sur le postulat d'Euclide. Voici comment on peut faire l'extension [1].

Soient deux forces P et Q rectangulaires, R leur résultante, $\alpha$ l'angle de OP et de OR.

R et $\alpha$ étant donnés, P et Q sont évidemment déterminés

$$P = G(R, \alpha),$$
$$Q = H(R, \alpha),$$

D'une remarque faite plus haut résulte que

$$P = R\, g(\alpha),$$
$$Q = R\, h(\alpha).$$

Cherchons à déterminer $g$ et $h$.

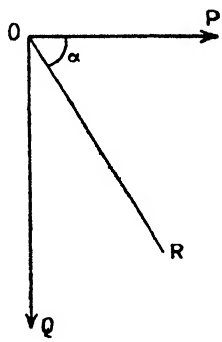
[1] Nous nous plaçons ici au même point de vue que M. Andrade dans son très intéressant Ouvrage sur les principes de la Mécanique (Jules Andrade, *Leçons de Mécanique physique*, 1898).

L'hypothèse C nous donne évidemment

$$g\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=h\alpha, \qquad g(\alpha)=h\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Prenons la symétrique de R par rapport à OP. Cette force peut être remplacée par une force OP et par une force $OQ_1$ qui est évidemment

Fig. 7.




opposée à OQ. La résultante des deux forces R est donc égale à 2 OP, c'est-à-dire à

$$2R\,g(\alpha),$$

mais c'est aussi

$$2R\cos\alpha.$$

On a donc

$$g(\alpha)=\cos\alpha.$$

Il en résulte

$$h(\alpha)=g\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha.$$

Ainsi se trouve traité le problème de la décomposition d'une force suivant deux directions rectangulaires, c'est-à-dire au fond celui de la composition de deux forces rectangulaires en géométrie non euclidienne.

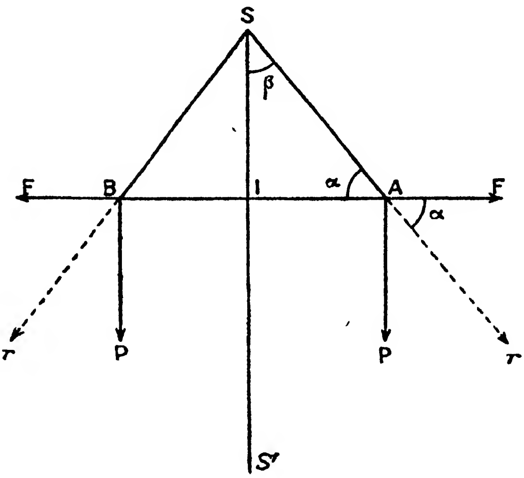
4. Venons-en au problème suivant :

Soit AB une droite dans un solide plan et soient AP, BP deux forces égales perpendiculaires à AB appliquées à ce solide. « Par raison de symétrie » la résultante sera appliquée au milieu I de AB perpendiculairement à AB. Sa valeur sera de la forme

$$R=2P\,\Phi(p),$$

d'après une remarque faite plus haut. $\Phi(p)$ est une fonction à déterminer de la demi-distance $p$ de A et B. Nous ne changeons rien au système en ajoutant les deux forces égales AF et BF et en remplaçant AF et AP

Fig. 8.




par leur résultante $Ar$; de même pour BP et BF. Nous aurons

$$P = r \sin\alpha, \qquad r = \frac{P}{\sin\alpha}.$$

La résultante des deux forces $r$ appliquée en S sera

$$R = 2r\cos\beta = 2P\frac{\cos\beta}{\sin\alpha},$$

la signification de $\beta$ étant évidente sur la figure (nous verrons d'ailleurs que l'on a $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$).

On tire de ce qui précède

$$\Phi(p) = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}. \tag{3}$$

Cherchons maintenant une équation fonctionnelle qui nous permette de déterminer $\Phi(p)$.

Portons sur AB les longueurs $IA' = IB' = p'$ et cherchons de deux façons différentes à exprimer la grandeur de la résultante R des quatre forces P appliquées en A, B, A' et B'.

Nous désignerons par Rés. $(F_1, F_2)$ la résultante des deux forces $F_1$, $F_2$. On a

$$R = \text{Rés.}[AP, BP] + \text{Rés.}[A'P, B'P]$$

et aussi

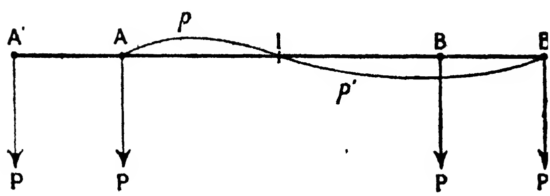
$$R = \text{Rés.}[\text{Rés.}(AP,\ A'P),\ \text{Rés.}(BP,\ B'P)],$$

d'où

$$2P\Phi(p) + 2P\,\Phi(p') = 2\ \text{Rés.}(AP,\ A'P)\Phi\left(\frac{p+p'}{2}\right)$$

$$= 4P\,\Phi\left(\frac{p'-p}{2}\right)\Phi\left(\frac{p+p'}{2}\right).$$

Fig. 9.




En posant

$$x = \frac{p+p'}{2}; \qquad y = \frac{p'-p}{2},$$

il vient

$$\Phi(x+y) + \Phi(x-y) = 2\,\Phi(x)\,\Phi(y).$$

On retrouve donc encore ici l'équation (2). Supposons alors que l'on ait pris F tel que $\alpha$ soit égal à l'angle de parallélisme $\pi(p)$; alors $\beta$ est nul et il vient

$$\Phi(p) = \frac{1}{\sin[\pi(p)]} > 1,$$

ce qui *montre que la seule solution qui soit ici acceptable est*

$$\Phi(p) = \operatorname{ch}\frac{p}{k}$$

($k$ est une constante que l'on peut supposer positive et qui a les dimensions d'une longueur).

Faisons quelques remarques :

1° On a

$$(4) \qquad \Phi(p) = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin[\pi(p)]} = \operatorname{ch}\frac{p}{k} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{p}{k}} + e^{-\frac{p}{k}}\right),$$

ensemble de formules qui nous sera très utile par la suite. On en déduit par un calcul simple la relation

$$\operatorname{tang}\frac{\pi(p)}{2} = e^{-\frac{p}{k}},$$

qui détermine $\pi(p)$.

Le cas de la géométrie euclidienne correspond à $k = +\infty$.
On a alors

$$\pi(p) = \frac{\pi}{2}, \qquad \Phi(p) = 1.$$

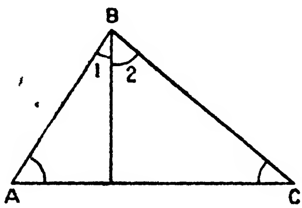
2° On a :

$$\frac{\cos\beta}{\sin\alpha} > 1, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) > \sin\alpha,$$

$$\alpha + \beta < \frac{\pi}{2},$$

ce qui montre que dans un triangle rectangle la somme des angles est

Fig. 10.




inférieure à $\pi$; cette propriété s'étend à un triangle quelconque; on a en effet :

$$A + B_1 < \frac{\pi}{2}, \qquad C + B_2 < \frac{\pi}{2}, \qquad A + B + C < \pi.$$

3° Nous démontrerons ultérieurement que deux droites « non sécantes » ont toujours une perpendiculaire commune. Le problème qui vient d'être étudié est donc celui de la composition des forces égales portées par deux droites non sécantes. Le point de rencontre de deux telles droites est imaginaire; il est naturel que l'équation fonctionnelle correspondant au cas réel se représente, et même que la solution devienne le cosinus d'un angle imaginaire $\frac{ip}{k}$ c'est-à-dire le cosinus hyperbolique de $\frac{p}{k}$. Le cas où l'angle est nul c'est-à-dire où les deux droites sont parallèles, n'a pas été examiné. On peut penser que dans ce cas intermédiaire, la fonction par laquelle il faut multiplier le double de la force, pour avoir la résultante, sera égale à la solution intermédiaire $\Phi(p) = 1$. C'est ce que nous allons démontrer.

Prenons deux droites AP, BP parallèles à une troisième IS *dans la même direction* (1), et telles que sur une même perpendiculaire AB à

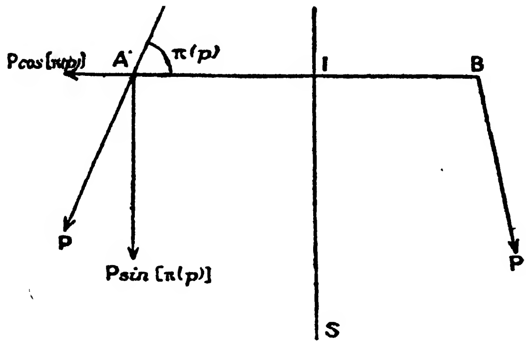
(1) Cela signifie somme toute, que AP, BP, IS ont un point commun à l'infini. AP et BP sont alors parallèles.

cette troisième droite on ait

$$AI = IB = p.$$

La résultante sera sur IS par raison de symétrie.

Fig. 11.




Remplaçons AP par les deux forces : $P\cos[\pi(p)]$ dirigée suivant IA et $P\sin[\pi(p)]$ dirigée suivant la perpendiculaire en A à AB ; faisons de même pour BP.

Les deux forces suivant IA se détruiront; les deux autres auront sur IS une résultante égale à

$$R = 2P\sin[\pi(p)]\,\mathrm{ch}\,\frac{p}{k},$$

mais

$$\mathrm{ch}\,\frac{p}{k} = \frac{1}{\sin[\pi(p)]};$$

on a donc bien

$$R = 2P.$$

## IV. — LES FORMULES FONDAMENTALES DE LA TRIGONOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE DÉDUITES DES FORMULES (4).

Nous avons écrit dans la première remarque du précédent paragraphe les formules :

$$(4) \qquad \Phi(p) = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin[\pi(p)]} = \mathrm{ch}\,\frac{p}{k}.$$

On peut en déduire, pour la trigonométrie de l'espace de Lobatchewsky, des formules analogues à celles de la trigonométrie ordinaire.

Nous admettrons les relations faciles à établir

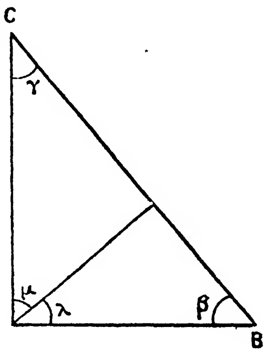
$$\mathrm{ch}^2 x = 1 + \mathrm{sh}^2 x; \tag{5}$$

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{sh}(x+y) &= \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, y + \mathrm{sh}\, y\, \mathrm{ch}\, x, \\ \mathrm{sh}(x-y) &= \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, y - \mathrm{sh}\, y\, \mathrm{ch}\, x, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

et les analogues pour les ch.

Ceci posé, soit pour commencer un triangle ABC rectangle en A.

Fig. 12.




AI est la hauteur relative à l'hypoténuse.

Posons

$$\mathrm{ACB} = \gamma, \qquad \mathrm{ABC} = \beta, \qquad \mathrm{IAC} = \mu, \qquad \mathrm{IAB} = \lambda.$$

Nous aurons

$$\mathrm{ch}\,\frac{\mathrm{AB}}{k} = \frac{\cos\gamma}{\sin\beta}, \qquad \mathrm{ch}\,\frac{\mathrm{AI}}{k} = \frac{\cos\gamma}{\sin\mu}, \qquad \mathrm{ch}\,\frac{\mathrm{BI}}{k} = \frac{\cos\lambda}{\sin\beta}, \qquad \frac{\sin\mu}{\sin\beta}$$

d'où

$$\mathrm{ch}\,\frac{\mathrm{AB}}{k} = \mathrm{ch}\,\frac{\mathrm{AI}}{k}\,\mathrm{ch}\,\frac{\mathrm{BI}}{k}.$$

Le triangle BAI n'a rien de spécial et l'on a par conséquent dans tout triangle rectangle d'hypoténuse $a$ :

$$\mathrm{ch}\,\frac{a}{k} = \mathrm{ch}\,\frac{b}{k}\,\mathrm{ch}\,\frac{c}{k}; \tag{7}$$

c'est l'analogue du théorème de Pythagore que l'on retrouverait en faisant

$$\mathrm{ch}\,\frac{x}{k} = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right]$$

et $k = \infty$ dans les développements en série des deux membres.

De (5) et (4) on tire, en reprenant le triangle ABC,

$$\operatorname{sh}^2 \frac{b}{k} = \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\gamma} - 1 = \frac{1-(\sin^2\beta+\sin^2\gamma)}{\sin^2\gamma}$$

et de même

$$\operatorname{sh}^2 \frac{c}{k} = \frac{1-(\sin^2\beta+\sin^2\gamma)}{\sin^2\beta}.$$

On a d'autre part

$$\operatorname{sh}^2 \frac{a}{k} = \cos^2\frac{b}{k}\operatorname{ch}^2\frac{c}{k} - 1,$$

$$\operatorname{sh}^2 \frac{a}{k} = \frac{\cos^2\beta\cos^2\gamma}{\sin^2\beta\sin^2\gamma} - 1 = \frac{1-(\sin^2\beta+\sin^2\gamma)}{\sin^2\beta\sin^2\gamma};$$

on tire de là

$$\operatorname{sh}\frac{a}{k}\sin\beta\sin\gamma = \operatorname{sh}\frac{b}{k}\sin\gamma = \operatorname{sh}\frac{c}{k}\sin\beta$$

ou

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}{1} = \frac{\operatorname{sh}\frac{b}{k}}{\sin\beta} = \frac{\operatorname{sh}\frac{c}{k}}{\sin\gamma}.$$

Étant alors donné un triangle quelconque, en le décomposant en deux triangles rectangles, on démontrera facilement la formule

$$(8) \qquad \frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\sin A} = \frac{\operatorname{sh}\frac{b}{k}}{\sin B} = \frac{\operatorname{sh}\frac{c}{k}}{\sin C},$$

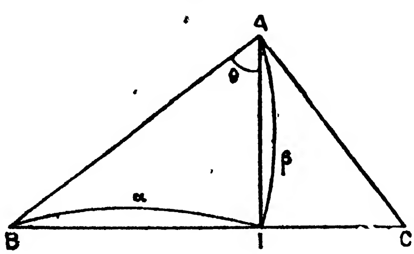
analogue à une formule bien connue de trigonométrie ordinaire.

Donnons pour finir la formule qui correspond, dans la trigonométrie ordinaire, à la formule

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B.$$

Prenons un triangle quelconque ABC et abaissons la hauteur AI.

Fig. 13.




Posons

$$AI = \beta, \qquad BI = \alpha, \qquad BAI = \theta.$$

On a dans AIC

$$\operatorname{ch}\frac{b}{k} = \operatorname{ch}\frac{a-\alpha}{k}\operatorname{ch}\frac{\beta}{k}$$

et d'après la formule d'addition des ch

$$\operatorname{ch}\frac{b}{k} = \operatorname{ch}\frac{\beta}{k}\left[\operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{\alpha}{k} - \operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{\alpha}{k}\right].$$

Mais on a dans ABI

$$\operatorname{ch}\frac{\alpha}{k}\operatorname{ch}\frac{\beta}{k} = \operatorname{ch}\frac{c}{k},$$

d'où

$$\operatorname{ch}\frac{b}{k} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{c}{k} - \operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{\alpha}{k}\operatorname{ch}\frac{\beta}{k}.$$

Or, en vertu de (4)

$$\operatorname{ch}\frac{\beta}{k} = \frac{\cos B}{\sin\theta},$$

en vertu de (8)

$$\operatorname{sh}\frac{\alpha}{k} = \operatorname{sh}\frac{c}{k}\sin\theta,$$

et par conséquent

$$\operatorname{sh}\frac{\alpha}{k}\operatorname{ch}\frac{\beta}{k} = \operatorname{sh}\frac{c}{k}\cos B.$$

d'où, enfin, la formule cherchée

$$\operatorname{ch}\frac{b}{k} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{c}{k} - \operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{c}{k}\cos B. \tag{9}$$

qui a beaucoup d'analogie avec la formule bien connue de trigonométrie sphérique

$$\cos\frac{b}{R} = \cos\frac{a}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{a}{R}\sin\frac{c}{R}\cos B.$$

Il suffit, d'ailleurs, de poser

$$R = ik$$

pour passer d'une formule à l'autre.

On peut donc dire que, *formellement, la trigonométrie de Lobatchewsky est identique à la trigonométrie sur une sphère de rayon imaginaire.*

## V. — IMAGES DE LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE. IMAGE PLANE.

1. Donnons-nous un système d'axiomes caractérisant les propriétés de figures simples (droites, cercles, etc.) dans une géométrie non euclidienne. S'il est possible de trouver dans un espace euclidien un système de figures satisfaisant à ces axiomes on pourra, à toute proposition de la géométrie non euclidienne en question, faire correspondre une proposition de géométrie euclidienne, ce qui permettra dans les raisonnements, d'avoir recours à notre intuition habituelle de l'espace. Le système euclidien ainsi construit sera l'image du système non euclidien d'où l'on est parti. Nous allons donner une image de la géométrie de Lobatchewsky dans le plan d'abord; puis dans l'espace à trois dimensions. Nous désignerons par des caractères gras l'élément de l'image qui correspond à l'élément non euclidien portant le même nom. Ainsi « **droite** » voudra dire : image d'une droite non euclidienne, alors que « droite » conservera son sens habituel.

Nous définirons pour commencer le groupe des **déplacements** en étudiant sommairement ses propriétés

Il faudra évidemment qu'un tel **déplacement** transforme l'espace en lui-même.

Nous aurons ensuite à définir la **droite** et la **distance rectiligne de deux points ou longueur de la droite qui joint ces points.**

Pour légitimer ces définitions, il sera nécessaire de montrer :

I. *que la* **distance** *est additive pour trois points sur une* **droite**.

II. *Qu'un* **déplacement** *transforme une* **droite** *en une autre* **droite** *et laisse invariante la* **longueur** *d'un* **segment de droite**.

III. *Qu'étant donnés deux* **segments** *de même* **longueur**, *il existe au moins un* **déplacement** *qui les amène à coïncider. Nous dirons que deux tels* **segments** *sont* **égaux**. *Nous aurons ainsi démontré le principe de* **superposition**. *Nous pourrons ainsi définir des* **figures égales**. *Ce seront des figures* **superposables** *par un* **déplacement**.

Il restera enfin à établir que l'image ainsi construite *satisfait à tous les axiomes de la géométrie de Lobatchewsky, c'est-à-dire à ceux de la géométrie euclidienne, sauf en ce qui concerne celui des parallèles.*

L'espace dans lequel nous nous plaçons est un demi-plan ; en prenant des axes rectangulaires $Ox$ et $Oy$, ce sera, par exemple, le demi-plan situé au-dessus de $Ox$. Nous définirons le déplacement par une transformation dans le plan de la variable complexe

$$z = x + iy.$$

Cette transformation est

$$Z = \frac{az+b}{cz+d} \tag{1}$$

avec

$$ad - bc = 1.$$

$a$, $b$, $c$, $d$ étant d'ailleurs réels.

Nous désignerons, jusqu'à la fin du Chapitre, la quantité conjuguée d'une variable complexe par la même notation que cette variable en l'affectant de l'indice o.

De la relation

$$X + iY = \frac{a(x+iy)+b}{c(x+iy)+d},$$

on tire immédiatement

$$Y = \frac{y}{(cz+d)(cz_0+d)} = \frac{y}{(cx+d)^2+c^2y^2}; \tag{2}$$

on voit que si $y$ est positif, $Y$ l'est aussi ce qui montre que la transformation transforme bien en lui-même le demi-plan supérieur, l'axe $Ox$ se correspondant ainsi à lui-même.

Un tel déplacement dépend d'ailleurs, tout comme le déplacement euclidien de *trois paramètres arbitraires*.

On voit aisément que les expressions

$$\frac{ds}{y} \quad \text{et} \quad \frac{d\omega}{y^2} \qquad (ds^2 = dx^2 + dy^2;\ d\omega = dx\,dy)$$

sont invariantes par un *déplacement*. On a en effet

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dz\,dz_0,$$

$$dS^2 = dZ\,dZ_0,$$

$$dZ = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}dz = \frac{dz}{(cz+d)^2}$$

et

$$dS^2 = \frac{ds^2}{(cz+d)^2(cz_0+d)^2}. \tag{3}$$

En comparant avec (2) on voit bien que l'on a ($dS$, $ds$, $y$ et $Y$ étant des quantités positives)

$$\frac{dS}{Y} = \frac{ds}{y}.$$

On démontrerait par un calcul analogue l'invariance de l'expression

$$\frac{d\omega}{y^2}.$$

Voyons maintenant quelle est la nature géométrique d'un déplacement et même, plus généralement, de la transformation

$$Z = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{1'}$$

où $a$, $b$, $c$, $d$ peuvent être complexes et ne sont assujettis qu'à la condition

$$ad - bc = 1.$$

On peut écrire comme chacun sait

$$Z = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c(cz + d)}.$$

On voit que la transformation (1') se ramène à une succession de transformations de types simples que nous allons examiner.

Ces transformations élémentaires peuvent se mettre sous l'une des trois formes :

$$Z = kz, \tag{$\alpha$}$$

$$Z = z + k', \tag{$\beta$}$$

$$Z = \frac{1}{z} \tag{$\gamma$}$$

(où $k$ et $k'$ peuvent être complexes);

($\alpha$) est une homothétie composée avec une rotation.

($\beta$) est une translation.

($\gamma$) une inversion composée avec une symétrie par rapport à $Ox$.

Mais une homothétie peut être considérée comme résultant de deux inversions, ou même d'un nombre pair quelconque d'inversions; il en est de même de la translation qui est une homothétie particulière. Une symétrie par rapport à une droite est une inversion dont le centre est à l'infini; une rotation peut, d'une infinité de manières, être considérée comme résultant de deux symétries, donc de deux inversions. On voit par conséquent que, *d'une infinité de manières, on peut considérer une transformation homographique sur la variable complexe comme le produit d'un nombre pair d'inversions.*

Réciproquement, une inversion par rapport à un cercle de rayon R et de centre $\gamma$ est donnée par

$$Z - \gamma = \frac{R^2}{z_0 - \gamma_0}.$$

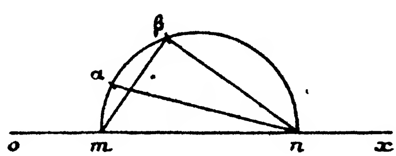
En faisant deux inversions successives ou, plus généralement, un *nombre pair d'inversions, on obtient donc une substitution homographique sur $z$.*

Cette remarque nous sera utile dans la suite.

2. Passons aux définitions géométriques.

Une **droite** sera soit une demi-circonférence orthogonale à $Ox$, soit une droite perpendiculaire à $Ox$. D'après ce que nous venons de voir sur la nature des **déplacements**, elle sera bien transformée en une autre **droite** dans un **déplacement**. Il est d'ailleurs évident que par deux points $\alpha$ et $\beta$ passe une **droite** et une seule. Soient $m$ et $n$ les points où cette **droite** coupe $Ox$. Nous supposerons $\alpha$ entre $m$ et $\beta$, $\beta$ entre $\alpha$ et $n$.

Fig. 14.




Le rapport anharmonique

$$\rho(\alpha, \beta) = \frac{\alpha - n}{\alpha - m} : \frac{\beta - n}{\beta - m},$$

des affixes des quatre points $\alpha$, $\beta$, $n$, $m$ est réel et par conséquent égal à son module, en effet :

$$\arg[\rho(\alpha, \beta)] = \arg\frac{\alpha - n}{\alpha - m} - \arg\frac{\beta - n}{\beta - m} = \widehat{m\alpha n} - \widehat{m\beta n} = 0.$$

D'après les hypothèses faites sur l'ordre des quatre points, on a

$$\left|\frac{\alpha - n}{\alpha - m}\right| > 1, \qquad \left|\frac{\beta - n}{\beta - m}\right| < 1, \qquad \text{d'où} \qquad |\rho(\alpha, \beta)| > 1,$$

c'est-à-dire

$$\rho(\alpha, \beta) > 1.$$

alors

$$\log \rho(\alpha, \beta) \geq 0.$$

Nous appellerons **distance** des deux points $\alpha$, $\beta$ l'expression

$$D(\alpha, \beta) = k \log(\alpha, \beta),$$

$k$ est une constante sur la nature de laquelle nous aurons à revenir.

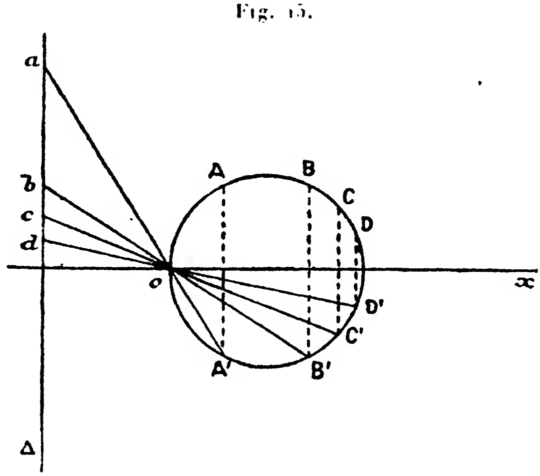
Par un **déplacement** le rapport anharmonique des transformés $\alpha_1$, $\beta_1$, $n_1$, $m_1$, de $\alpha$, $\beta$, $n$, $m$ est le même que celui de $\alpha$, $\beta$, $n$, $m$, car le **déplacement** est une transformation homographique sur les affixes; or les transformés de $m$ et $n$ sont encore les points d'intersection de $Ox$ et de la **droite** $\alpha_1\,\beta_1$, donc

$$(\alpha_1, \beta_1, n_1, m_1) = \rho(\alpha_1, \beta_1),$$

ce qui prouve qu'*un* **déplacement** *laisse invariante la* **distance**.

Remarquons d'ailleurs que $\rho(\alpha, \beta)$ — défini comme rapport anhar-

Fig. 15.




monique des affixes des quatre points $\alpha$, $\beta$, $n$, $m$ — n'est autre chose que le rapport anharmonique $(\alpha, \beta, n, m)$ des quatre points sur la circonférence. On démontre aisément en effet que, quatre points A, B, C, D étant donnés sur une circonférence, le rapport anharmonique

$$\frac{C - A}{C - D} : \frac{B - A}{B - D}$$

de leurs affixes est égal au rapport anharmonique des quatre points sur la circonférence.

Faisons en effet la transformation

$$Z = -\frac{1}{z},$$

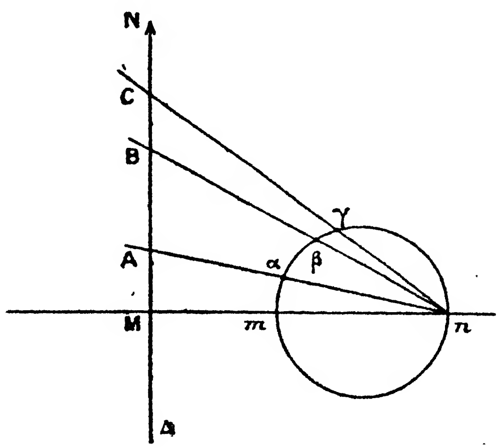
l'origine étant supposée sur la circonférence.

Celle-ci se transforme en une droite $\Delta$. A', B', C', D' étant les symétriques de A, B, C, D par rapport à $Ox$, on a sur la droite $\Delta$ les points $a$, $b$, $c$, $d$ comme transformés de A, B, C, D (*fig.* 14). La transformation étant homographique, le rapport anharmonique des affixes de A, B, C, D sera égal au rapport anharmonique des affixes de $a$, $b$, $c$, $d$, c'est-à-dire au rapport anharmonique des points $a$, $b$, $c$, $d$ sur $\Delta$, ou encore, en se reportant à la figure, au rapport anharmonique des points A, B, C, D sur le cercle. La propriété annoncée est donc démontrée

Avant d'aller plus loin nous allons donner à $\rho(\alpha, \beta)$ une forme plus simple.

Faisons une inversion de centre $n$.

Fig. 16.




Aux points $m\alpha\beta n$ correspondent sur la droite $\Delta$ transformée de la circonférence, les points M, A, B, et N à l'infini; on a :

$$(\alpha, \beta, n, m) = (A, B, N, M),$$

$$\rho(\alpha, \beta) = \frac{MB}{MA}.$$

Considérons alors trois points $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ en ligne droite ($\beta$ étant entre $\alpha$ et $\gamma$); à ces points correspondent sur $\Delta$ les points A, B, C.

On a

$$\rho(\alpha, \beta)\rho(\beta, \gamma) = \frac{MB}{MA} \cdot \frac{MC}{MB} = \frac{MC}{MA} = \rho(\alpha, \gamma),$$

d'où l'on tire immédiatement

$$D(\alpha, \beta) + D(\beta, \gamma) = D(\alpha, \gamma),$$

c'est la démonstration du fait que la distance jouit de la propriété additive pour trois points en ligne droite.

Cherchons maintenant à déterminer la distance de deux points très voisins $\alpha$ et $\beta$ d'affixes $z$ et $z + dz$,

$$D(\alpha, \beta) = k \log \frac{MB}{MA} = k \log\left(1 + \frac{AB}{MA}\right).$$

Mais A et B sont infiniment rapprochées ainsi que $\alpha$ et $\beta$ et, en vertu de l'invariance démontrée plus haut de l'expression $\frac{ds}{y}$, on a

$$\frac{AB}{MA} = \frac{ds}{y},$$

$ds$ et $y$ se rapportant au point $\alpha$. Alors,

$$D(\alpha, \beta) = k \log\left(1 + \frac{ds}{y}\right) = k \frac{ds}{y},$$

en se bornant à la partie principale de l'infiniment petit qu'est le logarithme.

Nous appellerons alors **longueur d'une courbe** l'intégrale $L = k \int \frac{ds}{y}$ étendue à cette courbe.

Remarquons que l'on a

$$D(\alpha, m) = \infty,$$
$$D(\alpha, n) = \infty,$$

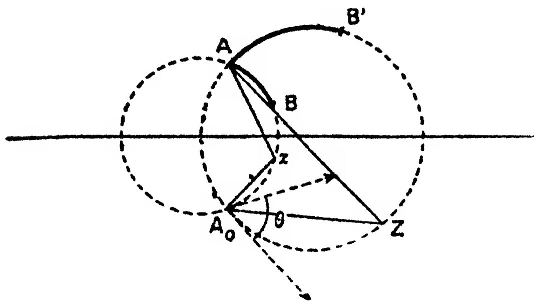
la distance de tout point de $Ox$ à un point du demi-plan est infinie; les points de $Ox$ sont donc les points à l'infini, ainsi d'ailleurs que les points à l'infini du demi-plan.

Les propriétés I et II étant établies, occupons-nous maintenant de la propriété III.

Soient deux segments égaux $ab$ et $a'b'$; il est bien évident qu'il existe des déplacements transformant $a$ en $a'$ et l'on est ramené à démontrer que *deux segments égaux* AB et A'B' *ayant une extrémité commune, peuvent être amenés à coïncider par un* déplacement.

Les deux cercles portant ces segments passent tous deux par $A_0$

Fig. 17.




symétrique de A par rapport à $Ox$.

La substitution

$$\frac{Z-a}{Z-a_0} = e^{i\theta}\frac{z-a}{z-a_0},$$

où $a$ est l'affixe de A et $\theta$ l'angle des deux cercles considérés, exprime que :

$$\widehat{A_0ZA} = A_0zA + \theta,$$

c'est-à-dire qu'elle transforme l'un dans l'autre les deux cercles considérés. Comme c'est un déplacement, deux points homologues sont équidistants de A, car A se transforme en lui-même; B' est donc bien le transformé de B. On peut considérer ce déplacement particulier comme une rotation d'angle $\theta$ autour de A, cette rotation amène AB à coïncider avec A'B'.

$\theta$ sera l'angle des deux droites AB et A'B'.

Quand $\theta$ varie B' décrit une courbe que nous appellerons circonférence de centre A et de rayon D(A, B). Cherchons quelle est cette courbe.

Soit $b$ l'affixe de B, Z celle de B'. Nous avons

$$\frac{Z-a}{Z-a_0} = e^{i\theta}\frac{b-a}{b-a_0},$$

posons

$$e^{i\theta} = \zeta.$$

quand $\theta$ varie, $\zeta$ décrit dans son plan une circonférence de rayon 1 dont le centre est à l'origine; mais la relation entre Z et $\zeta$ étant homographique, il en résulte que Z aussi décrira une circonférence Γ.

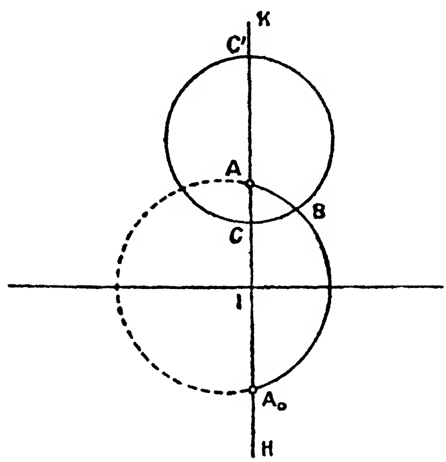
Cette circonférence est évidemment symétrique par rapport à la perpendiculaire HK menée par A à $Ox$. Cette perpendiculaire (qui est une droite) coupe la circonférence en C et C′; on aura, d'après la construction même,

$$D(A, C) = D(A, C') = D(A, B),$$

autrement dit

$$\frac{IA}{IC} = \frac{IC'}{IA}, \qquad IC.IC' = IA^2.$$

Fig. 18.




Ceci montre que A et $A_0$ sont conjugués par rapport à Γ et que toute circonférence passant par A et $A_0$ est orthogonale à Γ. Autrement dit la **circonférence** *est normale à toute* **droite** *passant par son* **centre** *ou, si l'on veut, à tous ses* **rayons.**

Posons

$$D(A, B) = r$$

et cherchons la longueur de la circonférence de centre A et de rayon $r$.

Nous avons d'abord

$$r = \frac{D(C, C')}{2} = \frac{k}{2}\log\frac{IC'}{IC}.$$

Posons

$$IC = \gamma, \qquad IC' = \gamma',$$

il vient $IA = \sqrt{\gamma\gamma'}$.

La demi-circonférence a pour longueur

$$\frac{L}{2} = k\int_C^{C'} \frac{ds}{y},$$

Désignons par R (*fig.* 19)

$$KC = KC' = \frac{\gamma - \gamma'}{2},$$

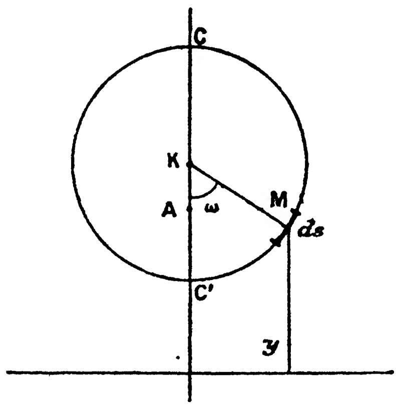
on a

$$y = R(1 - \cos\omega),$$
$$ds = R\,d\omega,$$

$$\frac{L}{2} = k\int_0^{\pi} \frac{R\,d\omega}{(\gamma + R)(1 - \cos\omega)} = k\int_0^{\pi} \frac{R\,d\omega}{\frac{\gamma + \gamma'}{2} - \frac{\gamma - \gamma'}{2}\cos\omega},$$

$$\frac{L}{2} = k\left[\sqrt{\frac{\gamma'}{\gamma}} - \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma'}}\right]\pi.$$

Fig. 19.




en se rappelant que

$$\int_0^{\pi} \frac{d\omega}{1 - e\cos\omega} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - e^2}} \qquad (e < 1)$$

Par un calcul facile, on obtiendra alors

$$L = k\pi\left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}\right) = 2k\pi\,\text{sh}\,\frac{r}{k}.$$

*Remarque.* — En géométrie sphérique la longueur du cercle dont le « rayon » (longueur de l'arc de grand cercle qui joint le pôle à un point du cercle) est $r$, est donnée par la formule

$$L = 2\pi R \sin\frac{r}{R},$$

où R est le rayon de la sphère.

En faisant $R = ki$ on retrouve la formule que nous venons d'obtenir.

Pour $k = \infty$ on retrouve d'ailleurs bien le résultat de géométrie euclidienne

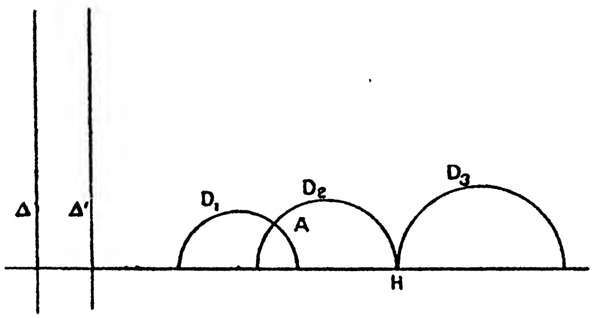
$$L = 2\pi r.$$

3. Dans la géométrie de Lobatchewsky comme dans la géométrie euclidienne, deux droites parallèles sont des droites se coupant à l'infini.

Dans notre image, nous avons vu que les points à l'infini sont soit les points de $Ox$, soit les points à l'infini du demi-plan.

Étant données deux droites, trois cas peuvent se présenter : elles peuvent se couper en un point A à distance finie comme les droites $D_1$

Fig. 20.

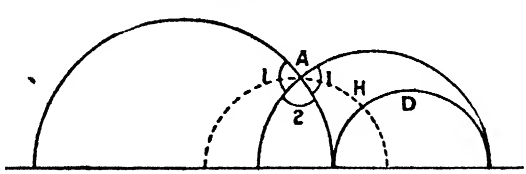



et $D_2$, ne pas se couper du tout comme les droites $D_1$ et $D_3$ (non sécantes) enfin se couper en un point à l'infini H comme $D_2$ et $D_3$ ou comme $\Delta$ et $\Delta'$ (parallèles).

On voit qu'étant donnés une droite D et un point extérieur A, on peut toujours par A mener deux parallèles à D. Les autres droites passant par A coupent ou ne coupent pas D suivant qu'elles sont dans l'angle 1 ou dans l'angle 2 des parallèles. On est donc bien dans le cas de la géométrie de Lobatchewsky.

La perpendiculaire AH abaissée de A sur D fait avec les deux parallèles le même angle (nous allons le montrer); cet angle est l'angle de parallélisme : nous allons calculer sa valeur $\pi(p)$ en fonction de $p = D(A, H)$.

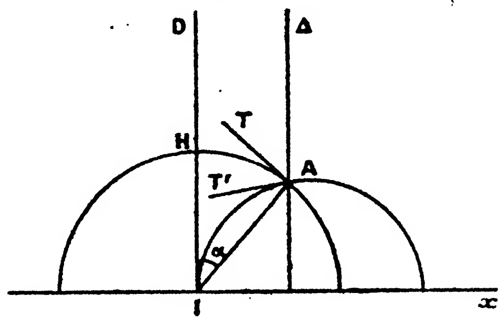
Fig. 21.



Nous simplifierons la démonstration et le calcul sans diminuer la généralité en ramenant, par un déplacement, la droite D à être une droite perpendiculaire à $Ox$.

Les deux parallèles menées par le point A seront alors la perpendiculaire abaissée de A sur $Ox$ et la demi-circonférence tangente en I à D.

Fig. 22.




La perpendiculaire abaissée de A sur D est la demi-circonférence de centre I passant par A. Menons IA et désignons par $\alpha$ l'angle AIH : on a évidemment

$$\Delta AT = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

d'autre part

$$T'AI = \alpha$$

et

$$TAT' = \frac{\pi}{2} - \alpha = \Delta AT = \pi(p),$$

ce qui montre bien que AH fait avec AΔ et AI des angles égaux : on a

$$\pi(p) = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Calculons

$$p = D(A, H) = k\int_{AH} \frac{ds}{y},$$

$$p = k\int_{\pi(p)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R\,d\theta}{R\sin\theta} = k\int_{\pi(p)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin\theta} = \left|\log \operatorname{tang} \frac{\theta}{2}\right|_{\pi(p)}^{\frac{\pi}{2}},$$

d'où

$$p = -k \log \operatorname{tang} \frac{\pi(p)}{2}.$$

On en tire immédiatement

$$\operatorname{tang} \frac{\pi(p)}{2} = e^{-\frac{p}{k}},$$

ou encore

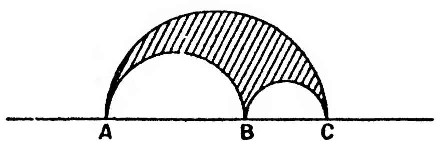
$$\operatorname{ch}\frac{p}{k} = \frac{1}{\sin \pi(p)},$$

ce qui montre, en se rapportant aux formules (4) (Section III, § 4, Remarque 1°), que $k$ est la même constante que le $k$ qui s'était introduit à ce moment-là dans les calculs.

4. Nous allons maintenant, en raisonnant sur l'image, établir un certain nombre de théorèmes de géométrie non euclidienne.

$\alpha$. *Il existe des* triangles *dont les trois* angles *sont nuls;* les trois

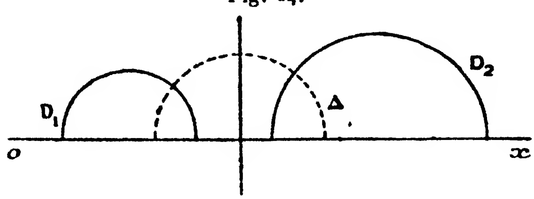
Fig. 23.




sommets d'un tel triangle sont à l'infini. La figure est assez claire pour nous dispenser de plus amples explications.

$\beta$. *Deux* droites *non sécantes ont une* perpendiculaire commune.

Fig. 24.

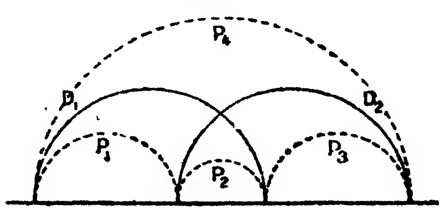



Il existe en effet une circonférence $\Delta$ orthogonale à $Ox$, $D_1$ et $D_2$; son centre est le point où l'axe radical de $D_1$ et $D_2$ coupe $Ox$.

Nous avons utilisé ce résultat (Section III, § 4, Remarque 3°).

$\gamma$. *A deux* droites *quelconques* $D_1$ *et* $D_2$ *non* parallèles *on peut*

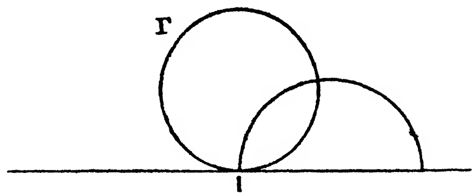
Fig. 25.




*mener quatre* parallèles communes *distinctes*. Il suffit de joindre par une droite un des points à l'infini de $D_1$ à l'un des points à l'infini de $D_2$.

$\delta$. Dans notre image un cercle ne coupant pas $Ox$ était un cercle.

Fig. 26.

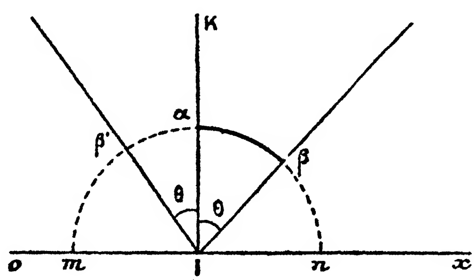



Demandons-nous ce qu'est un cercle Γ tangent à $Ox$.

Toutes les droites passant par le point de contact I sont orthogonales à ce cercle. Ces droites sont toutes parallèles entre elles puisqu'elles ont en commun le point I à l'infini. Le cercle Γ est donc une courbe normale à une infinité de droites parallèles; c'est ce que Lobatchewsky appelait un horicycle. On peut le regarder comme la limite d'un cercle dont le centre s'éloigne à l'infini (on a en effet en reprenant les notations employées plus haut $IA^2 = IC . IC'$ et comme $IC = 0$, $IA = 0$ ce qui prouve que le centre A du cercle coïncide avec I et se trouve donc à l'infini).

$\varepsilon$. En géométrie euclidienne le lieu des points dont la distance à une droite est constante, est une droite parallèle à la première. Voyons ce que devient ce lieu dans la géométrie non euclidienne.

Fig. 27.




La généralité ne sera pas diminuée en prenant comme droite initiale une perpendiculaire IK à $Ox$.

La perpendiculaire abaissée de $\beta$ sur IK est l'arc de cercle $\beta\alpha$ de centre I.

Pour le lieu cherché on doit avoir

$$D(\beta, \alpha) = \text{const.},$$

$$\frac{\alpha - n}{\alpha - m} : \frac{\beta - n}{\beta - m} = \text{const.},$$

ce qui donne évidemment

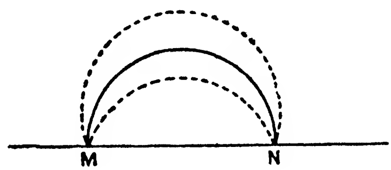
$$0 = \text{const.}$$

Le lieu de $\beta$ est formé par les droites $I\beta$ et $I\beta'$.

Pour une droite représentée par une demi-circonférence qui coupe $Ox$ en M et N, le lieu sera donc formé de deux portions de circonférence passant par M et N comme il est aisé de le voir.

Ces courbes sont appelées par Lobatchewsky des hypercycles et

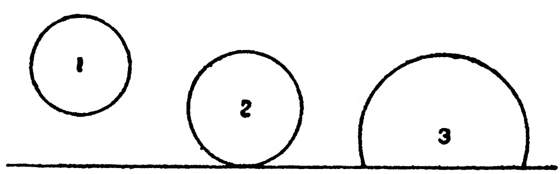
Fig. 28.




peuvent être, en somme, considérées comme des cercles dont tous les rayons sont perpendiculaires à une même droite.

On peut dire, en résumé, qu'un cercle du demi-plan peut être : (1)

Fig. 29.




un cercle : (2) un horicycle ; (3) un hypercycle, la droite étant d'ailleurs un cas particulier d'hypercycle.

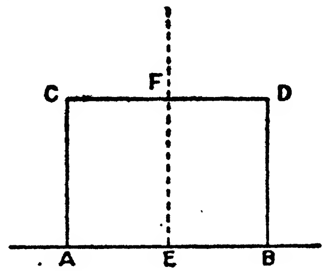
$\eta$. Pour terminer cette série de remarques, nous dirons encore un mot de Saccheri.

Le père Saccheri, jésuite italien, fit paraître en 1733 un travail intitulé « *Euclides ab omni nævo vindicatus* ». Il croyait y démontrer le postulat d'Euclide, en établissant que l'on rencontre des contradictions si on ne l'admet pas.

Il considère deux droites perpendiculaires en A et B à une droite AB. Sur ces deux droites il porte des longueurs égales AC = BD.

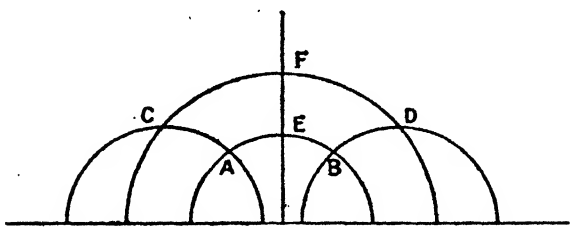
Par raison de symétrie les angles en C et D sont égaux. Saccheri croit pouvoir montrer que l'on arrive à des contradictions si l'on ne suppose

Fig. 30.




pas qu'ils sont droits; ceci justifierait alors le postulat d'Euclide. En fait ces angles C et D sont aigus dans la géométrie lobatchewskienne comme

Fig. 31.




on le voit sur l'image ci-dessus et cela n'implique évidemment pas contradiction. (On a supposé dans la figure que l'axe EF de symétrie est une droite perpendiculaire à $Ox$; c'est évidemment légitime.)

Malgré l'erreur faite par Saccheri, certaines remarques qu'il fait le placent, malgré lui certes, parmi les précurseurs de la géométrie non euclidienne.

5. L'invariance de l'expression $\frac{ds}{y}$ et le fait que nous l'avons choisie comme **élément d'arc** dans notre image, se rapprochent de certains théorèmes sur les surfaces à courbure constante négative (¹).

On peut en effet choisir les variables, sur de telles surfaces, pour que

(¹) *Voir* par exemple les *Leçons sur la théorie des surfaces*, de Darboux.

l'élément d'arc soit précisément donné par

$$dS^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

D'ailleurs pour une surface répondant à

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

l'élément d'aire est

$$d\omega = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

On aura donc pour les surfaces considérées, comme elément d'aire,

$$\frac{dx\,dy}{y^2},$$

c'est précisément le second invariant rencontré dans le paragraphe 1 de la présente section.

Ceci nous conduit à prendre comme **élément d'aire** dans notre image

$$k^2\frac{d\omega}{y^2},$$

de même que nous avions pris comme **élément d'arc**,

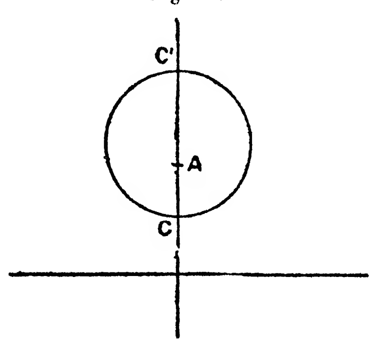
$$k\frac{ds}{y}.$$

L'aire limitée par une courbe fermée sera donc l'intégrale

$$S = k^2\int\int\frac{d\omega}{y^2}$$

étendue au domaine intérieur à la courbe. Il est aisé de calculer l'aire

Fig 32.




d'un cercle en fonction de son rayon, ce sera $k^2\int\int\frac{dx\,dy}{y^2}$ étendue a l'intérieur du cercle considéré; on trouve

$$S = \pi k^2 \left[ e^{\frac{r}{2k}} - e^{-\frac{r}{2k}} \right]^2 = 4\pi k^2 \operatorname{sh}^2 \frac{r}{2k}.$$

En faisant $k = \infty$ on retrouve l'aire euclidienne

$$S = \pi r^2.$$

L'analogie avec la géométrie sphérique se poursuit : la formule analogue en géométrie sphérique est en effet

$$S = 4\pi R^2 \sin^2 \frac{r}{2R},$$

et l'on passe encore de l'une à l'autre en faisant

$$R = ik.$$

Cherchons encore à calculer l'aire d'un triangle.

Ce sera

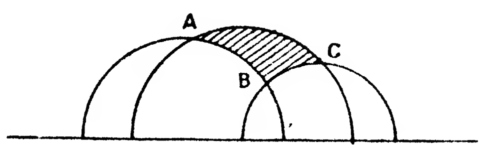
$$S = k^2 \iint \frac{dx\,dy}{y^2}$$

étendue à l'intérieur du triangle curviligne ABC.

Dans la formule de Stokes :

$$\iint \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx\,dy = -\int_C P\,dx + Q\,dy,$$

Fig. 33.




posons

$$P = \frac{1}{y}, \qquad Q = 0,$$

il vient pour notre triangle

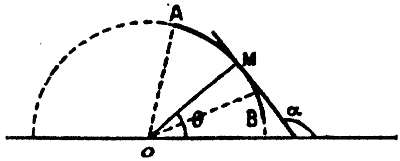
$$(1) \qquad S = k^2 \iint \frac{dx\,dy}{y^2} = k^2 \int_{CABC} \frac{dx}{y}.$$

Nous sommes ainsi ramenés au calcul d'une intégrale de ligne particulièrement simple.

Cherchons la valeur de cette intégrale le long de AB.

En prenant pour origine le centre de AB (la translation le long

Fig. 34.




de $Ox$ ne change évidemment rien à l'intégrale), on a

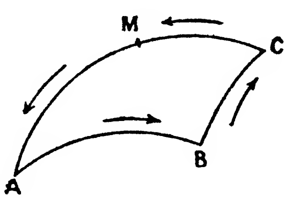
$$x = R\cos\theta, \qquad y = R\sin\theta,$$
$$\frac{dx}{y} = -d\theta,$$

l'intégrale est donc opposée à la variation de $\theta$ le long de AB, c'est-a-dire à la variation de $\alpha$ le long de AB, $\alpha$ étant l'angle avec $Ox$ de la tangente à l'arc de cercle.

L'intégrale cherchée est donc la somme changée de signe des variations de $\alpha$ le long des trois côtés. La variation totale de cet angle lorsque l'on décrit le contour dans le sens positif, en partant d'un point M pour y revenir est évidemment $2\pi$.

Dans cette variation, entrent la somme que nous cherchons et la

Fig. 35.




somme des variations aux sommets, variations qui sont $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$. On aura alors, en définitive,

$$\int_{CABC} \frac{dx}{y} = -\left[\int_{CA} d\alpha + \int_{AB} d\alpha + \int_{BC} d\alpha\right]$$
$$= -[2\pi - (\pi - A + \pi - B + \pi - C)] = -(A + B + C - \pi).$$

Remarquons que d'après (1) l'intégrale en question est essentiellement positive, ce qui montre que

$$A + B + C - \pi < 0.$$

*La somme des* **angles** *d'un* **triangle** *est inférieure à $\pi$. On voit de plus que* **l'aire du triangle** *est égale à l'excès de $\pi$ sur la somme des trois angles, multiplié par $k^2$.*

En géométrie sphérique on a un résultat analogue : la somme des trois angles d'un triangle est supérieure à $\pi$ et l'aire du triangle est égale au produit par $R^2$ de l'excès sphérique

$$A + B + C - \pi.$$

En posant $R = ik$ on retombe sur le resultat précédent.

6. Si l'on applique au demi-plan une transformation linéaire à coefficients imaginaires, on pourra transformer ce demi-plan en l'intérieur d'une circonférence C; on obtiendra ainsi une autre image : les **points à l'infini** y seront ceux de la circonférence C, une **droite** sera une circonférence orthogonale à C et ainsi de suite.

Soit

$$(1) \qquad z = \frac{aZ + b}{cZ + d} \qquad (ad - bc = 1)$$

la substitution employée.

Cherchons ce que devient **l'élément d'arc**

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

L'axe des $Ox$

$$y = 0$$

s'est transformé en le cercle C. On a

$$(2) \qquad y = \frac{1}{2i}\left[\frac{aZ + b}{cZ + d} - \frac{a_0 Z_0 + b_0}{c_0 Z_0 + d_0}\right]$$
$$= \frac{1}{2i}\,\frac{(aZ + b)(c_0 Z_0 + d_0) - (cZ + d)(a_0 Z_0 + b_0)}{(cZ + d)(c_0 Z_0 + d_0)}.$$

L'équation du cercle C est donc

$$(3) \qquad (aZ + b)(c_0 Z_0 + d_0) - (cZ + d)(a_0 Z_0 + b_0) = 0.$$

Il est d'ailleurs possible de choisir la transformation de façon que C soit le cercle de rayon 1 et de centre O. Son équation est alors

$$1 - X^2 - Y^2 = 0 \qquad \text{ou bien} \qquad 1 - ZZ_0 = 0.$$

Désignons par P le premier membre de l'équation (3). On a d'ailleurs,

$$dx^2 + dy^2 = dz\,dz_0 = \frac{dZ\,dZ_0}{(cZ + d)^2 (c_0 Z_0 + d_0)^2},$$

d'où, si l'on compare avec (2),

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{dX^2 + dY^2}{P^2},$$

et en tenant compte du choix particulier du cercle,

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{dX^2 + dY^2}{(1 - X^2 - Y^2)^2}.$$

Tel est dans la nouvelle image le carré de **l'élément d'arc.**

## VI. — IMAGE DE LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE A TROIS DIMENSIONS.

1. Il paraît facile de généraliser ce que nous venons de dire de la géométrie à trois dimensions. Nous rapportons l'espace à trois axes rectangulaires $o\xi$, $o\eta$, $o\zeta$. L'espace image sera le demi-espace au-dessus du plan P des $\xi\eta$.

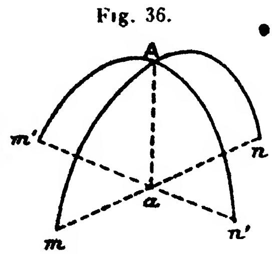
Une **droite** sera une demi-circonférence normale à P. Il passe par deux points une **droite** et une seule. La **distance** de deux points sera définie comme dans le cas du plan.

**Un plan** est une demi-sphère orthogonale à P. Par trois points non **en ligne droite** passe un **plan** et un seul, on le voit aisément, par deux **droites** qui se coupent passe un **plan** et un seul; en effet, on a sur la figure

$$\overline{Aa}^2 = ma.na = m'a.n'a,$$

les quatre points $m$, $n$, $m'$, $n'$ sont sur une même circonférence et le reste s'ensuit.

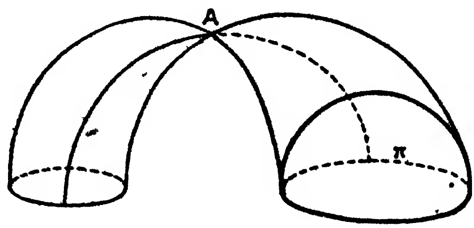
Fig. 36.




On pourrait se poser des problèmes analogues à ceux posés en géométrie plane : on définirait ainsi **sphère, horisphère, hypersphère,** etc.

Certains problèmes simples en géométrie euclidienne apparaissent ici plus compliqués. Par exemple, le lieu des parallèles menées par un

Fig. 37.




point A à un plan $\pi$ a pour image, comme on le voit aisément, une surface cerclée qui est la transformée par inversion d'un cône de révolution, c'est-à-dire une cyclide de Dupin.

**2.** Une question se pose : que va être ici le groupe des **déplacements** ? Nous savons déjà qu'il doit dépendre de six paramètres et transformer le plan P en lui-même, ainsi que le demi-espace supérieur.

Poincaré (¹) a été amené, à propos des groupes kleinéens, à étudier le demi-espace sous un point de vue qui fournit à la question posée une réponse d'ordre géométrique.

Nous avons vu (Section V, § I) que toute transformation homographique à coefficients quelconques sur la variable complexe peut d'une infinité de manières être considérée comme la résultante d'un nombre pair d'inversions.

Considérons alors le groupe de ces transformations dans le plan de la variable

$$z = \xi + i\eta.$$

Nous allons chercher à étendre ce groupe de façon à pouvoir appliquer ses transformations à un point quelconque du demi-espace supérieur.

Soit T une transformation du groupe. Décomposons-la en un nombre pair d'inversions qui auront lieu par rapport aux cercles $C_1, \ldots, C_{2n}$. Soient $S_1, \ldots, S_{2n}$ les sphères ayant respectivement mêmes centres et mêmes rayons que $C_1, \ldots, C_{2n}$. Effectuons les inversions par rapport à ces sphères et considérons la transformation $\Theta$ résultante. Cette transformation s'applique à tout l'espace et se réduit à T pour un point du

(¹) H. Poincaré, *Mémoire sur les groupes kleinéens* (*Acta Matematica*, 1883).

plan $z\eta$. La décomposition de T, pouvant se faire d'une infinité de manières, il faut montrer que par deux décompositions différentes, on *aboutit à la même transformation* $\Theta$.

Soit $\Gamma$ un cercle du plan : T le transforme en $\Gamma'$. $\Theta_1$ provenant de la première décomposition et $\Theta_2$ provenant de la seconde transformeront évidemment l'une et l'autre la sphère de grand cercle $\Gamma$ en la sphère de grand cercle $\Gamma'$ (1).

Soit alors un point A du demi-espace. Par ce point faisons passer trois sphères orthogonales au plan P. Soient $S_1$, $S_2$, $S_3$ ces trois sphères; $C_1$, $C_2$, $C_3$ leurs traces sur P. T transforme $C_1$, $C_2$, $C_3$ en $C'_1$, $C'_2$, $C'_3$; les trois sphères, aussi bien par $\Theta_1$ que par $\Theta_2$, se transforment en les trois sphères $S'_1$, $S'_2$, $S'_3$ ayant pour grands cercles $C'_1$, $C'_2$, $C'_3$ de sorte que $\Theta_1$ et $\Theta_2$ transforment l'une et l'autre A, en le point commun à $S'_1$, $S'_2$, $S'_3$; $\Theta_1$ et $\Theta_2$ coïncident donc bien.

Les transformations $T\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ forment un groupe à six paramètres réels, correspondant aux trois rapports complexes de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$. Les transformations $\Theta$ forment donc aussi un groupe à six paramètres puisqu'elles correspondent une à une aux transformations T. Ces transformations formées uniquement d'inversions transforment une droite en droite, un plan en plan, conservent les rapports anharmoniques et par conséquent les *distances*.

Elles admettent les invariants

$$\frac{ds}{\gamma}, \quad \frac{d\omega}{\gamma^2}, \quad \frac{dv}{\gamma^3},$$

où $d\omega$ est une aire, $dv$ un volume, infiniment petits. Une inversion transforme en effet une figure infiniment petite en une figure semblable. Le centre I d'inversion étant dans le plan P et les éléments d'arc étant également inclinés sur le rayon vecteur, le rapport de similitude est évidemment égal au rapport des cotes comme on le voit sur la figure. Ceci démontre les invariances plus haut énoncées.

On prendra donc pour élément d'arc

$$k\frac{ds}{\gamma},$$

pour élément d'aire

$$k^2\frac{d\omega}{\gamma^2},$$

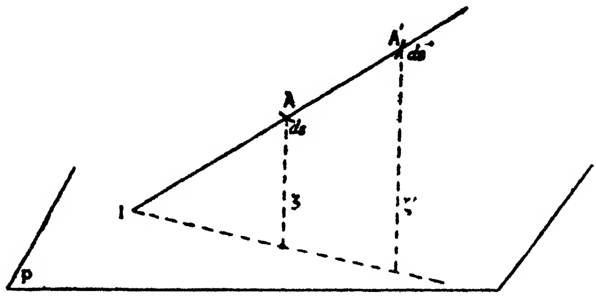
(1) Une transformation $\Theta$ doit en effet transformer une sphère orthogonale à P en une autre sphère jouissant de la même propriété; d'autre part, le grand cercle de la sphère transformée doit être $\Gamma'$.

pour élément de volume

$$k^3 \frac{dv}{z^3}.$$

Nous avons, en définitive l'image, dans le demi-plan supérieur, de la

Fig. 38.




géométrie non euclidienne. *Il y a des* **déplacements** *à six paramètres comme dans l'espace euclidien et ces* **déplacements** *conservent les* **éléments métriques** *plus haut définis.*

3. Nous allons maintenant rechercher les formules donnant effectivement le groupe des **déplacements**. Poincaré les obtient directement. Nous nous placerons à un autre point de vue que lui ([1]).

Nous examinerons tout d'abord le cas de la géométrie plane, pour lequel nous connaissons déjà la forme des équations du groupe des **déplacements**. Nous montrerons que ces équations se retrouvent dans certaines questions relatives à la théorie des formes quadratiques. Il ne restera plus qu'à trouver pour le cas de trois dimensions une marche analogue.

Remarquons tout d'abord que la relation

$$(1) \qquad z' = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (a,\ b,\ c,\ d \text{ réels})$$

peut s'écrire

$$(2) \qquad \begin{cases} x'^2 + y'^2 = |z'|^2 = \dfrac{a^2(x^2+y^2) + 2abx + b^2}{c^2(x^2+y^2) + 2cdx + d^2}, \\[2ex] x' = \mathcal{R}(z') = \dfrac{ac(x^2+y^2) + (ad+bc)x + bd}{c^2(x^2+y^2) + 2cdx + d^2}. \end{cases}$$

([1]) E. Picard, *Sur un groupe de transformations des points de l'espace du même côté d'un plan* (*Bull. Soc. Math. de France*, 1884) et aussi : E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. I, 3e édition, p. 578.

Ce sont ces nouvelles équations que nous prendrons pour déterminer le groupe des **déplacements**.

Soit

$$AX^2 + 2BXY + CY^2$$

une forme quadratique; si $B^2 - AC < 0$, et si $A > 0$, $B > 0$ la forme qui est constamment positive est dite « définie et positive ».

On démontre qu'il existe dans ce cas une substitution à coefficients entiers

$$(X, Y;\ \alpha X + \beta Y,\ \gamma X + \delta Y)$$

qui transforme cette forme en une forme

$$A'X^2 + 2B'XY + C'Y^2$$

dite « forme réduite », pour laquelle on a

$$A' \leqq C' \qquad \text{et} \qquad -A' \leqq 2B' \leqq A'.$$

On est donc amené, à propos du problème de la réduction des formes, à étudier l'effet sur cette forme, des substitutions linéaires.

On aura ici, en développant la substitution,

$$\begin{aligned} A' &= A\alpha^2 + 2B\alpha\gamma + C\gamma^2, \\ B' &= A\alpha\beta + B(\alpha\delta + \beta\gamma) + C\gamma\delta, \\ C' &= A\beta^2 + 2B\beta\delta + C\delta^2. \end{aligned}$$

Les seconds membres présentent, avec les numérateurs et dénominateurs des seconds membres de (2), une assez grande analogie et les reproduisent même exactement si l'on prend

$$A = 1, \qquad B = x, \qquad C = x^2 + y^2,$$
$$\alpha = d, \qquad \beta = b, \qquad \gamma = c, \qquad \delta = a.$$

De sorte qu'en faisant, sur la forme définie et positive,

$$(3) \qquad X^2 + 2xXY + (x^2 + y^2)Y^2,$$

la substitution

$$(4) \qquad (X, Y;\ dX + bY,\ cX + aY),$$

Les équations (2) peuvent s'écrire,

$$(2') \qquad \left\{ \begin{aligned} x'^2 - y'^2 &= \frac{C'}{A'}, \\ x' &= \frac{B'}{A'}, \end{aligned} \right.$$

A′, B′, C′ étant les nouveaux coefficients.

On peut alors penser qu'il existe une autre forme qui, traitée de la même façon, donnerait les équations définissant le groupe des **déplacements** pour le cas de trois dimensions.

Partons en effet de la forme

$$XX_0 + xXY_0 + x_0 Y_0 Y + (xx_0 + y^2) YY_0,$$

dans laquelle $x$ est une quantité complexe, $y$ une quantité réelle positive, et X et Y des variables complexes (l'indice o indique encore les quantités conjuguées). Une telle forme est dite « à indéterminées conjuguées » (Hermite). De plus elle est définie et positive et, comme nous le verrons plus loin, la réduction est possible pour elle.

Faisons sur X, Y la substitution

$$(4') \qquad (X, Y; dX + bY, cX + aY) \qquad (ad - bc = 1),$$

$a$, $b$, $c$, $d$ pouvant cette fois être complexes.

La forme devient

$$A'XX_0 + B'XY_0 + B_0 X_0 Y + C'YY_0$$

avec

$$\begin{aligned} A' &= cc_0(xx_0 + y^2) + dc_0 x + d_0 c x_0 + dd_0, \\ B' &= ca_0(xx_0 + y^2) + a_0 d x + cb_0 x_0 + db_0, \\ C' &= aa_0(xx_0 + y^2) + ba_0 x + b_0 a x_0 + bb_0; \end{aligned}$$

on a d'ailleurs

$$A' > 0, \qquad C' > 0, \qquad B'B'_0 - A'C' < 0.$$

Par analogie avec le cas précédent, on est conduit à envisager les équations

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{B'}{A'}, \\ x'x'_0 + y'^2 &= \frac{C'}{A'}, \end{aligned} \right.$$

auxquelles on peut, si l'on veut, adjoindre l'équation

$$x_0 = \frac{B'_0}{A'_0},$$

équivalente à la première. On définit ainsi une substitution homographique sur les trois variables $x$, $x_0$ et $xx_0 + y^2$.

Lorsqu'on donne à $a$, $b$, $c$, $d$ toutes les valeurs possibles, ces substitutions forment évidemment un groupe qui d'ailleurs dépend des trois paramètres complexes $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{d}{a}$, c'est-à-dire de six paramètres réels.

Posons

$$x = \xi + i\eta, \qquad y = \zeta;$$
$$x' = \xi' + i\eta', \qquad y' = \zeta'.$$

Si dans les équations (5) nous faisons

$$\zeta = y = 0,$$

il vient

$$(\alpha) \qquad x' = \frac{(a_0 x + b_0)(c x_0 + d)}{(c_0 x + d_0)(c x_0 + d)} = \frac{a_0 x + b_0}{c_0 x + d_0},$$

$$(\beta) \qquad y'^2 = \frac{(a x_0 + b)(a_0 x + b_0)}{(c x_0 + d)(c_0 x + d_0)} - x x_0 = 0.$$

On voit que les équations (5) définissent, en somme, pour l'espace $(\xi, \eta, \zeta)$ un groupe de transformations qui laissent invariant le plan P. On peut évidemment prendre pour $y'$ la valeur positive; le groupe transforme alors le demi-plan supérieur en lui-même. Désignons par $\Theta'$ une transformation de ce groupe; nous allons voir qu'il coïncide avec le groupe $\Theta$ défini géométriquement au paragraphe 2. L'équation $(\beta)$ montre déjà que ces deux groupes sont en coïncidence dans le plan P. Il suffira de montrer qu'une transformation $\Theta'$ transforme une sphère orthogonale à P en une autre sphère orthogonale à P; s'il en est ainsi les deux groupes, puisqu'ils coïncident sur P, donneront d'une même sphère orthogonale à P les mêmes transformées. Si, alors, on définit un point A du demi-espace comme intersection de trois de ces sphères, il est évident que les deux groupes donneront de A les mêmes transformées, et par conséquent coïncideront. Or l'équation d'une sphère orthogonale à P est de la forme

$$x x_0 + y^2 + \rho x + \rho_0 x_0 + r = 0 \qquad (r \text{ réel})$$

et se transforme par les substitutions (5) en une équation de même forme, ces substitutions (5) étant homographiques par rapport aux variables

$$x x_0 + y^2, \quad x, \quad x_0,$$

qui figurent linéairement dans l'équation de la sphère. Les équations (5) définissent donc bien le groupe des **déplacements** pour le cas de trois dimensions.

Le théorème de réduction des formes quadratiques fournit une importante propriété du sous-groupe des **déplacements** pour lesquels les constantes $a$, $b$, $c$, $d$ sont entières.

*Plaçons-nous d'abord dans le cas de deux dimensions :* Soit $(x, y)$ un point quelconque du demi-plan; il existe une substitution à coefficients entiers sur les variables X, Y,

$$(X, Y;\ \delta X + \beta Y,\ \gamma X + \alpha Y),$$

telle que la forme transformée de

$$X^2 + 2xXY + (x^2 + y^2)Y^2$$

soit réduite. On aura alors, d'après (2'),

$$(|z'|)^2 = \frac{C'}{A'} > 1 \qquad (|z'| > 1)$$

et

$$-\frac{1}{2} \leqq x' \leqq \frac{1}{2}, \qquad \text{puisque } x' = \frac{B'}{A'}.$$

$z'$ désigne comme toujours l'expression

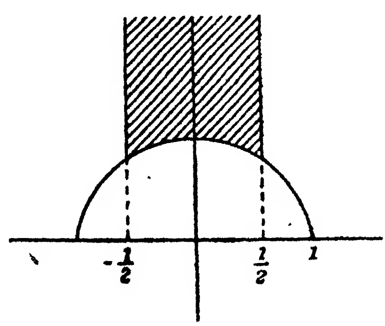
$$\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

On voit donc que la transformation

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

*a transformé le point arbitraire $x$, $y$ en un point intérieur au*

Fig. 39.




*triangle curviligne* hachuré sur la figure. Ce triangle s'appelle le « triangle fondamental » du groupe.

*Le cas des trois dimensions est analogue*. La condition de réduction est

$$A' \leqq C', \quad 2|m| < A, \quad 0 < 2n < A,$$

en posant

$$B = m + ni.$$

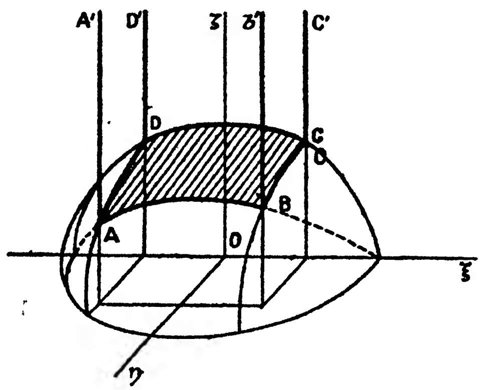
[On peut toujours supposer que $m$ ou $n$ est positif en faisant au besoin la substitution $(X, Y; iX, -iY)$. Nous avons pris $n > 0$ pour fixer les idées.]

Les raisonnements sont les mêmes que dans le premier cas et l'on voit ainsi qu'il existe une transformation à coefficients entiers complexes

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

qui transforme un point arbitraire $(\xi, \eta, \zeta)$ du demi-espace en un point

Fig. 40.




$(\xi', \eta', \zeta')$ tel que l'on ait

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 > 1,$$

$$-\frac{1}{2} < \xi < +\frac{1}{2}, \qquad 0 < \eta < \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire intérieur au polyèdre curviligne ABCD A'B'C'D' qui prend le nom de *polyèdre fondamental* du groupe.

# CHAPITRE II.

## FONCTIONS ANALYTIQUES DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES FONCTIONS UNIFORMES ADMETTANT UN THÉORÈME RATIONNEL D'ADDITION OU DE MULTIPLICATION.

---

Nous n'avons opéré jusqu'à présent que sur des fonctions de variables réelles. Nous allons maintenant nous placer au point de vue des fonctions analytiques. La connaissance d'une équation fonctionnelle à laquelle satisfait une fonction analytique peut permettre de la prolonger et, dans le cas où la fonction est uniforme, de démontrer cette uniformité. Nous démontrerons plus loin de cette façon que la fonction inverse de l'intégrale elliptique de première espèce est uniforme :

« C'est même », dit M. H. Poincaré [1] dans un Mémoire dont nous aurons à nous occuper, « la seule démonstration rigoureuse qui ait été proposée jusqu'ici, à l'exception des démonstrations indirectes où l'on commence par définir $\Theta$. » [2].

### I. — LE PROLONGEMENT DE $\Gamma(z)$.

Pour commencer voici un exemple très simple de ce mode de prolongement :

Soit $f(z)$ une fonction analytique définie dans le demi-plan

$$\mathcal{R}(z) > 0 \qquad [\mathcal{R}(z) = \text{partie réelle de } z]$$

et holomorphe dans tout ce demi-plan. Nous supposerons que cette fonc-

---

[1] H. Poincaré, *Mémoire sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes* (*Journal de Liouville*, 1890).

[2] Une autre démonstration a été depuis donnée par M. Picard. *Voir* par exemple : E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, 2e édition, p. 379.

tion satisfait à la relation fonctionnelle

$$f(z+1) = z\,f(z). \tag{1}$$

Désignons par $\varphi(z)$ la fonction définie, dans la bande

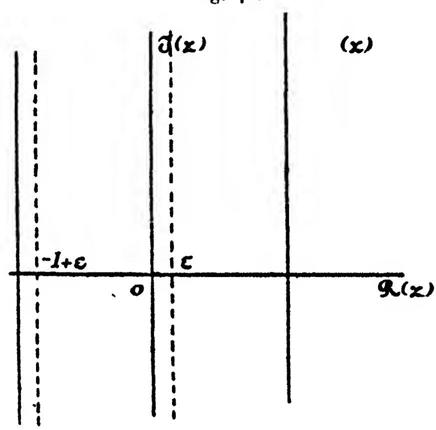
$$-1+\varepsilon < \mathcal{R}(z) < \varepsilon,$$

par la relation

$$\varphi(z) = \frac{f(z+1)}{z}.$$

La fonction $f(z+1)$ étant holomorphe dans la bande considérée, $\varphi(z)$

Fig. 41.




n'aura dans cette bande qu'un seul point singulier, le pôle simple

$$z = 0.$$

$\varphi$ est donc une fonction analytique *méromorphe* qui, coïncidant avec $f(z)$ dans la bande

$$0 < \mathcal{R}(z) < \varepsilon$$

en vertu de l'équation fonctionnelle (1), *en constitue le prolongement analytique*. On s'y prendra de la même façon pour prolonger $f(z)$ dans la bande

$$-2+2\varepsilon < \mathcal{R}(z) < -1+2\varepsilon,$$

et, après un nombre suffisant d'opérations, on voit que l'on aura atteint un point arbitraire du plan, en n'introduisant comme points singuliers que *les pôles simples* d'affixes

$$0, \quad -1, \quad -2, \quad \ldots, \quad -n, \quad \ldots.$$

Cette méthode s'applique en particulier à la fonction

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1}\, dx$$

dont l'expression par l'intégrale n'a de sens que pour

$$\mathcal{R}(z) > 0.$$

Il est facile de voir en effet que $\Gamma(z)$ satisfait à l'équation (1).

On a

$$\frac{d(e^{-x}x^z)}{dx} = z\,e^{-x}x^{z-1} - e^{-x}x^z,$$

en intégrant de o à $+\infty$, il vient bien

$$0 = z\,\Gamma(z) - \Gamma(z+1),$$

c'est-à-dire

$$(1') \qquad \Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z).$$

On aurait pu aussi obtenir directement le prolongement. Écrivons

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-x}x^{z-1}\, dx + \int_1^\infty e^{-x}x^{z-1}\, dx.$$

La première intégrale est partout définie et holomorphe, la seconde peut s'écrire

$$\int_1^\infty \left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \ldots\right) x^{z-1}\, dx,$$

ce qui, en intégrant, donne

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{2!}\,\frac{1}{z+2} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{1}{z+n} + \ldots,$$

série manifestement convergente pour toute valeur de $z$ différente d'un entier négatif.

Remarquons que la solution générale de l'équation (1) s'obtient aisément à partir de la solution particulière $\Gamma$. Si l'on pose, en effet,

$$f(z) = \Gamma(z)\,G(z),$$

et si l'on substitue dans (1) en tenant compte de (1') il vient

$$G(z+1) = G(z),$$

ce qui exprime que $G(z)$ est une fonction quelconque de période 1.

Il existe d'ailleurs d'autres relations fonctionnelles auxquelles satisfait $\Gamma(z)$. On démontre par exemple que l'on a, entre $\Gamma$ et l'intégrale eulérienne de seconde espèce

$$B(p, q) = \int_0^\infty x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}\,dy}{(1+y)^{p+q}},$$

la relation

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

En faisant $p+q=1$, $B(p, q)$ se calcule aisément et l'on a

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \frac{\pi}{\sin p\pi},$$

ou si l'on veut

$$(2) \qquad \Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin p\pi},$$

c'est la *relation des compléments.*

Cette nouvelle équation fonctionnelle peut, comme la première, fournir sur $\Gamma(z)$ des renseignements intéressants; on en déduit en effet que $\frac{1}{\Gamma(z)}$ est une fonction entière car, d'après cette relation, on a

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{\Gamma(1-z)\sin \pi z}{\pi}.$$

Or les seuls points singuliers de $\Gamma(1-z)$ sont les pôles simples

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n, \quad \ldots$$

ce sont aussi des zéros de $\sin \pi z$ ce qui suffit à démontrer le fait énoncé.

Remarquons enfin que si l'on pose

$$f(z) = e^{\int_0^z \psi(z)\,dz},$$

$\psi(z)$ est la dérivée logarithmique de $f(z)$; on voit facilement que cette fonction est solution de l'équation aux différences finies

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x},$$

qui se trouve ainsi résolue.

## II. — INTÉGRALES ELLIPTIQUES.

Nous aurons besoin par la suite d'un certain nombre de résultats essentiels et de définitions appartenant à la théorie des intégrales et des fonctions elliptiques. Rappelons-les brièvement avant de poursuivre (¹).

1. Nous supposerons connues les définitions des intégrales elliptiques et plus généralement des intégrales abéliennes, ainsi que la réduction de ces intégrales aux types simples. C'est uniquement des intégrales de première espèce que nous aurons besoin.

L'élément différentiel de l'intégrale elliptique de première espèce

$$I = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}}$$

admet comme points de ramification les zéros — supposés distincts — du dénominateur. La valeur de cette intégrale dépend alors du chemin d'intégration suivi. Un tel chemin peut toujours se ramener à un chemin déterminé $C_0$ suivi d'un certain nombre de *lacets* décrits autour des points $a$, $b$, $c$, $d$ et partant de $x_0$ pour y revenir. Désignons par A l'intégrale

$$\int_{x_0}^{a} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}}$$

prise en suivant le chemin tracé pour le lacet, le radical ayant en $x_0$ une certaine détermination $y_0$ (B, C, D seront définis de façon analogue, la détermination du radical en $x_0$ étant toujours $y_0$). L'intégrale pourra se mettre, selon la parité du nombre des lacets décrits, sous l'une des deux formes

$$\begin{aligned} I &= \phantom{2A - {}} I_0 + m(2A - 2B) + m'(2A - 2C), \\ I &= 2A - I_0 + m_1(2A - 2B) + m'_1(2A - 2C), \end{aligned}$$

les $m$ étant des entiers dépendant du nombre des lacets décrits. Les quantités $2A - 2B$, $2A - 2C$ qui figurent dans cette expression sont les *périodes* de l'intégrale; on les désigne par $\omega$ et $\omega'$. On voit qu'il y en a deux. Il est évident qu'on aurait pu prendre aussi bien

$$2A - 2B, \quad 2A - 2D$$

ou toute autre combinaison analogue, les quatre pôles du dénominateur jouant exactement le même rôle.

*Les périodes $\omega$ et $\omega'$ sont distinctes* (ne peuvent pas s'exprimer toutes deux par des multiples entiers d'une période unique) *et leur rapport*

(¹) On pourra, pour ce qui suit, voir le *Traité d'Analyse* de M. Picard, le Tome II en particulier.

*ne peut pas être un nombre réel.* En effet, si $\omega$ et $\omega'$ se réduisaient à une période unique $\Omega$, les diverses déterminations de l'intégrale

$$I = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}}$$

ne pourraient être que de l'une des deux formes

$$I_0 + m\Omega, \qquad 2A - I_0 + m_1\Omega,$$

de sorte que la fonction

$$F(x) = e^{\frac{2\pi i I}{\Omega}} + e^{\frac{2\pi i}{\Omega}(2A - I)}$$

serait uniforme. I étant une intégrale de première espèce, $F(x)$ ne peut devenir infinie pour aucune valeur (finie ou non) de $x$; ce serait donc une fonction holomorphe dans tout le plan (y compris le point à l'infini), c'est-à-dire une constante; alors I serait une constante ce qui est manifestement absurde.

De ce qui précède on peut conclure que le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ n'est certainement pas un nombre commensurable réel. Si cela était, on aurait

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{m}{n};$$

$m$ et $n$ étant des entiers réels premiers entre eux, il serait possible de déterminer $p$ et $q$ tels que

$$pm + qn = 1,$$

on aurait alors

$$\frac{\omega}{m} = \frac{\omega'}{n} = \frac{p\omega + q\omega'}{pm + qn};$$

$$\omega = m\Omega, \qquad \omega' = n\Omega,$$

$\Omega$ étant la quantité $p\omega + q\omega'$ c'est-à-dire une période. Nous venons de démontrer l'impossibilité d'une pareille réduction. Si, donc, le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ était réel, il ne pourrait être qu'incommensurable,

$$\omega' = \alpha\omega,$$

on pourrait alors trouver des entiers $m$ et $n$ tels que la quantité

$$m - n\alpha$$

soit arbitrairement petite; la période

$$m\omega - n\omega'$$

serait arbitrairement petite et à deux valeurs arbitrairement voisines de I correspondrait une même valeur pour $x$. Nous verrons que cela est impossible; nous démontrerons en effet que $x$ est une fonction uniforme de la variable I ce qui rend le résultat précédent impossible à admettre.

**2.** On peut par des transformations simples ramener l'intégrale I à la forme canonique dite de Legendre,

$$\mathrm{I} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

On posera d'abord

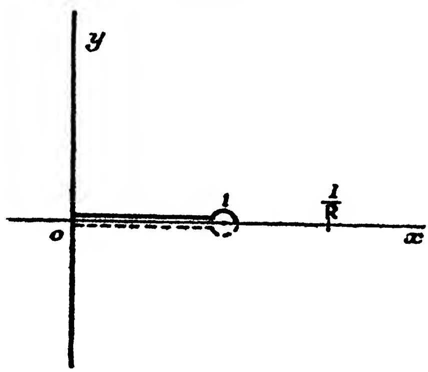
$$y = \frac{1}{p-x}$$

avec la condition

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} - \frac{1}{p-c} - \frac{1}{p-d} = 0.$$

La somme des deux premières racines du polynome transformé de $\mathrm{R}(x)$

Fig. 42.




devient alors égale à la somme des deux autres racines; si $2h$ est la valeur commune de ces sommes, la transformation

$$z_1 = y - h$$

donne sous le radical un polynome ayant ses racines deux à deux opposées; enfin par la transformation

$$z = \alpha z_1,$$

on parviendra à la forme indiquée.

Nous allons étudier les périodes de cette intégrale dans le cas, particulièrement intéressant pour les applications, où $k$ est réel, positif et inférieur à l'unité.

Les quatre points critiques sont dans ce cas

$$1, \quad \frac{1}{k}, \quad -1, \quad -\frac{1}{k},$$

tous sur l'axe réel.

La valeur de l'intégrale le long du lacet entourant le point 1 (et partant de 0) sera $2A$, avec

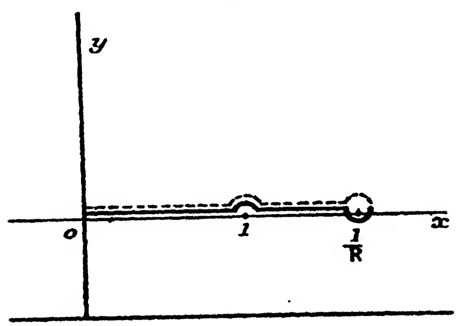
$$A = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Nous désignerons par K l'intégrale définie qui figure dans le second membre,

$$A = K.$$

Pour avoir l'intégrale le long du lacet entourant $\frac{1}{k}$ nous ferons passer ce lacet au-dessus du point 1 (comme l'indique la figure).

Fig. 43.




Les intégrales le long des petits cercles sont aussi petites que l'on veut. Sur le demi-cercle entourant 1, l'argument de la quantité sous le radical varie de $-\pi$ et la détermination

$$\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$

avec laquelle on est parti de 0 pour aller jusqu'à 1 devra entre 1 et $\frac{1}{k}$ être remplacée par

$$-i\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)},$$

de sorte que l'on a

$$B = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + i\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}},$$

soit

$$B = K + iK',$$

en posant

$$K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}.$$

Les deux autres lacets donneront évidemment des valeurs C et D respectivement opposées à A et B. On pourra alors prendre comme périodes

$$\begin{aligned} 2A - 2C &= \omega = \phantom{i}2K - (-2K) \phantom{)} = 4K, \\ 2B - 2A &= \omega' = 2(K + iK') - 2K = 2iK'. \end{aligned}$$

Calculons encore l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1-k^2x^2)}}$$

prise le long de l'axe réel en évitant le point 1 et $\frac{1}{k}$ par des demi-cercles situés au-dessus de l'axe réel. Nous n'avons à faire le calcul qu'entre $\frac{1}{k}$ et $+\infty$. Par un raisonnement analogue à celui que nous venons de faire, l'élément différentiel devient

$$- \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}}.$$

Si l'on pose alors

$$kx = \frac{1}{y},$$

on trouve

$$\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = K,$$

et l'on a

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = K + iK' - K = iK'.$$

3. On sait que si la courbe algébrique

$$f(x, y) = 0$$

est de genre $p$, il y a $p$ intégrales abéliennes distinctes de première espèce qui lui sont attachées. Ces intégrales, comme les intégrales elliptiques, ont des périodes. Par la considération de la fonction

$$F(x) = \sum_{k=1}^{k=m} e^{\frac{2\pi i}{\omega} \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{Q(x, y)}{f'_y} dx}$$

(où $y_1, \ldots, y_m$ sont les $m$ racines de l'équation en $y : f(x, y) = 0$), on démontre comme plus haut que les périodes de l'intégrale de première espèce

$$\int_{x_0 y_0}^{xy} \frac{Q(x, y)}{f'_y} dx,$$

ne *peuvent pas se réduire à la seule période* $\omega$.

Nous rappellerons encore sans le démontrer le théorème d'Abel :

*Soit une intégrale abélienne* $\int R(x, y)\, dx$ *attachée à la courbe algébrique*

$$f(x, y) = 0$$

*et soient* $(x_1, y_1), \ldots, (x_\mu, y_\mu)$ *les points d'intersection variables de cette courbe avec la courbe algébrique variable*

$$\lambda(x, y \mid a_1 \ldots a_r) = 0,$$

*l'expression*

$$\sum_{i=1}^{i=\mu} \int_{(x_0 y_0)}^{(x_i y_i)} R(x, y)\, dx$$

*est une fonction algébrico-logarithmique des paramètres*

$$a_1, \quad \ldots, \quad a_r.$$

Si en particulier l'intégrale est de première espèce, cette somme ne pourra être que *constante* puisqu'elle doit rester finie. On pourra toujours choisir $x_0, y_0$ pour que cette *constante soit nulle.*

## III. — LA FONCTION $\lambda(u)$ INVERSE DE L'INTÉGRALE ELLIPTIQUE DE PREMIÈRE ESPÈCE.

1. Revenons à l'intégrale

$$(1) \qquad z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} \qquad (0 < k < 1),$$

$z$ est une fonction de $x$ continue, impaire et admettant une infinité de déterminations. Elle admet pour dérivée

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

Nous pouvons sans difficulté faire l'inversion uniforme de cette fonction dans un cercle $\gamma$ de rayon $r$ suffisamment petit, ayant son centre à l'origine. Le point $x = 0$, pour lequel on a aussi $z = 0$, n'est en effet pour la dérivée ni un zéro, ni un infini. La fonction inverse ainsi obtenue

$$x = \lambda(z)$$

est évidemment impaire dans le cercle $\gamma$.

Montrons que cette fonction satisfait à une équation fonctionnelle qui nous permettra, comme nous l'avons annoncé plus haut, de la prolonger dans tout le plan de façon uniforme. Nous utiliserons pour cela le théorème d'Abel.

On peut considérer l'intégrale (1) comme une intégrale abélienne de première espèce attachée à la courbe

$$y^2 = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2). \tag{2}$$

La parabole variable

$$y = a x^2 + a_1 x + 1 \tag{3}$$

coupe cette courbe en un point fixe $(0, 1)$ et en trois points variables : $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$; $x_1$, $x_2$, $x_3$ étant les racines de l'équation

$$(a^2 - k^2)x^3 + 2aa_1 x^2 + (a_1^2 + 2a + 1 + k^2)x + 2a_1 = 0. \tag{4}$$

On a d'ailleurs entre les six quantités $x_1$, $y_1$, $x_2$, $y_2$, $x_3$, $y_3$, les deux groupes de relations

$$y_i^2 = 1 - (1 + k^2)x_i^2 + k^2 x_i^4 \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{2'}$$

$$y_i = a x_i^2 + a_1 x_i + 1 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{3'}$$

Pour

$$a_1 = 0,$$

$$a = -\frac{1 + k^2}{2},$$

les trois points d'intersection variables se confondent avec le point $(0, 1)$; il sera donc possible de prendre $a_1$ et $a$ assez rapprochés respectivement de $0$ et $-\frac{1 + k^2}{2}$ pour que les trois quantités

$$u = \int_{0,1}^{x_1, y_1} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}},$$

$$v = \int_{0,1}^{x_2, y_2} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}},$$

$$w = \int_{0,1}^{x_3, y_3} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}$$

soient toutes trois inférieures à $r$ en module. On peut alors écrire

$$x_1 = \lambda(u), \qquad x_2 = \lambda(v), \qquad x_3 = \lambda(w)$$

et, comme il est aisé de le voir,

$$y_1 = \lambda'(u), \qquad y_2 = \lambda'(v), \qquad y_2 = \lambda'(w).$$

Le théorème d'Abel donne d'ailleurs

$$u + v + w = 0,$$

c'est-à-dire

$$x_3 = \lambda(-u - v) = -\lambda(u + v).$$

Cherchons à déterminer $x_3$ en fonction de $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$. Nous avons

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{2aa_1}{a^2 - k^2},$$

$$x_1 x_2 x_3 = -\frac{2a_1}{a^2 - k^2},$$

d'où

$$a = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1 x_2 x_3}, \qquad x_3 = \frac{x_1 + x_2}{a x_1 x_2 - 1}$$

On tire de (3′)

$$y_1 x_2 - y_2 x_1 = (a x_1 x_2 - 1)(x_1 - x_2),$$

d'où

$$x_3 = \frac{x_1^2 - x_2^2}{y_1 x_2 - x_1 y_2},$$

relation que l'on peut encore modifier en multipliant haut et bas par $y_1 x_2 + x_1 y_2$ et se servant de (2′); on trouve alors

$$x_3 = -\frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{1 - k^2 x_1^2 x_2^2},$$

ce qu'on peut écrire

$$\lambda(u + v) = \frac{\lambda(u)\lambda'(v) + \lambda'(u)\lambda(v)}{1 - k^2 \lambda^2(x)\lambda^2(v)};$$

c'est la *formule d'addition de la fonction* $\lambda(u)$.

Si l'on fait dans cette relation $u = v$, il vient

$$(6) \qquad \lambda(2u) = \frac{2\lambda(u)\lambda'(u)}{1 - k^2\lambda^4(u)},$$

qui est la relation fonctionnelle cherchée.

Nous avons supposé en particulier

$$|w| < r,$$

c'est-à-dire ici

$$|2u| < r$$

et par conséquent

$$|u| < \frac{r}{2}.$$

Soit alors la fonction $\mu(u)$ définie pour

$$|u| < r$$

par la relation

$$\mu(u) = \frac{2\lambda(u)\lambda'(u)}{1 - k^2\lambda^4(u)}.$$

Cette fonction n'a d'autres singularités que des pôles ; en vertu de (6) elle se confond pour

$$|u| < \frac{r}{2}$$

avec la fonction $\lambda(2u)$ ; elle en est par conséquent le prolongement analytique, et $\lambda(u)$ se trouve du même coup prolongée dans le cercle de rayon $2r$. Il est évident que par des applications répétées de ce raisonnement, on pourra prolonger $\lambda(u)$ jusqu'à un point quelconque du plan sans introduire d'autres singularités que des pôles. L'uniformité de $\lambda(u)$ dans tout le plan est donc démontrée avec toutes ses conséquences. En particulier $u$ étant fonction impaire de $\lambda$, $\lambda(u)$ est fonction impaire de $u$ et ceci dans tout le plan.

2. D'après ce que nous avons vu des différentes déterminations que peut prendre l'intégrale de première espèce, on voit que

$$\lambda[z + m \times 4K + m_1 \times 2iK'] = \lambda[2K - z + m \times 4K + m_1 \times 2iK'] = \lambda(z),$$

puisque $4K$ et $2iK'$ sont, comme nous l'avons vu, des périodes de l'intégrale considérée. La fonction étant impaire, on a d'ailleurs

$$\lambda(-z) = -\lambda(z),$$

on voit aisément que

$$\lambda(2K + z) = \lambda(-z) = -\lambda(z).$$

Pour $z = 0$ la fonction $\lambda$ s'annule

$$\lambda(0) = 0,$$

on a donc aussi

$$\lambda(2K) = 0.$$

*0 et $2K$ sont les deux zéros de $\lambda(z)$ dans le parallélogramme de périodes qui a pour centre l'origine.*

On sait d'autre part que $i\text{K}'$ *est un pôle* puisque

$$i\text{K}' = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

ainsi que nous l'avons vu. Dans ces conditions, *un autre pôle sera* $2\text{K} + i\text{K}'$.

Cherchons pour $z = i\text{K}'$ la limite de l'expression

$$\frac{\lambda'(z)}{\lambda^2(z)},$$

on a

$$z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\frac{1}{k}} + \int_{\frac{1}{k}}^x = \text{K} - i\text{K}' - \int_{\frac{1}{k}}^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}},$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}},$$

ce qui prouve que lorsque $\lambda(z)$, c'est-à-dire $x$, devient infini, $\dfrac{dz}{dx} = \lambda'(z)$ devient infini comme $-kx^2$. On a donc

$$\lim_{z=i\text{K}'} \frac{\lambda'(z)}{\lambda^2(z)} = -k.$$

Si l'on écrit alors

$$\lambda(z+a) = \frac{\lambda(z)\lambda'(a) + \lambda'(z)\lambda(a)}{1 - k^2\lambda^2(z)\lambda^2(a)},$$

et si l'on fait tendre $a$ vers $i\text{K}'$, *on trouve*, en se servant du résultat précédent, *la relation*

$$\lambda(z + i\text{K}') = \frac{1}{k\,\lambda(z)},$$

*que nous utiliserons plus tard.*

La fonction $\lambda(z)$ que nous venons ainsi d'étudier est celle que Jacobi appelait

$$\operatorname{sn} z,$$

il considérait en même temps les fonctions

$$\operatorname{cn} z = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 z},$$
$$\operatorname{dn} z = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z}.$$

On voit que

$$\operatorname{sn}(z + i\text{K}') = \frac{1}{k \operatorname{sn} z}, \qquad \operatorname{cn}(z + i\text{K}') = \frac{i}{k \operatorname{sn} z} \operatorname{dn} z,$$
$$\operatorname{dn}(z + i\text{K}') = \frac{i}{\operatorname{sn} z} \operatorname{cn} z.$$

Jacobi considérait encore des fonctions qu'il appelait les fonctions $\Theta$; ces fonctions admettent une période $a$ et sont multipliées par une certaine exponentielle si l'on augmente de $b$ la valeur de la variable; dans chaque parallélogramme dont les côtés sont $a$ et $b$, elles admettent une racine unique — d'ailleurs aisément calculable. Nous aurons à nous servir de fonctions de cette espèce et en ferons à ce moment là une étude plus détaillée.

## IV. — FONCTIONS UNIFORMES AYANT UN THÉORÈME D'ADDITION.

Revenons à la formule d'addition de la fonction $\lambda(u)$

$$\lambda(u+v) = \frac{\lambda(u)\lambda'(v)+\lambda(v)\lambda'(u)}{1-k^2\lambda^2(u)\lambda^2(v)}. \tag{1}$$

On a d'ailleurs

$$\lambda'(u) = \sqrt{[1-\lambda^2(u)][1-k^2\lambda^2(u)]},$$
$$\lambda'(v) = \sqrt{[1-\lambda^2(v)][1-k^2\lambda^2(v)]}.$$

On pourra, après avoir remplacé dans (1) les $\lambda'$ par ces valeurs, chasser les radicaux et obtenir ainsi une *relation algébrique*

$$g[\lambda(u+v), \lambda(u), \lambda(v)] = 0$$

entre $\lambda(u+v)$, $\lambda(u)$, $\lambda(v)$. C'est là, à proprement parler, la véritable formule d'addition : *elle ne fait plus intervenir les dérivées*.

En dehors de la fonction $\lambda$, nous connaissions déjà deux catégories de fonctions uniformes admettant une *formule d'addition rationnelle* : les *fonctions rationnelles* et les *fonctions rationnelles de l'exponentielle* $e^{au}$ (fonctions trigon.).

On peut se demander s'il existe d'autres fonctions *uniformes* jouissant de cette propriété.

**1.** Une première méthode consiste à transformer le problème pour le rattacher à celui de *Briot et Bouquet*.

$g$ étant un polynome supposé irréductible, soit $f(u)$ une fonction satisfaisant à la relation *algébrique*

$$g[f(u+v), f(u), f(v)] = 0. \tag{2}$$

En posant

$$f(u+v) = x, \qquad f(u) = y, \qquad f(v) = z,$$

la relation s'écrit

$$g(x, y, z) = 0. \tag{2'}$$

En différentiant par rapport à $u$, puis par rapport à $v$, il vient

$$\frac{\partial g}{\partial x} f'(u+v) + \frac{\partial g}{\partial y} f'(u) = 0,$$
$$\frac{\partial g}{\partial x} f'(u+v) + \frac{\partial g}{\partial z} f'(v) = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial g}{\partial y} f'(u) - \frac{\partial g}{\partial z} f'(v) = 0. \tag{3}$$

L'élimination de $x$ entre (2') et (3) donnera la relation algébrique

$$F[f(u), f'(u); f(v), f'(v)] = 0.$$

Il y a donc une *relation algébrique* entre $f(u)$ et $f'(u)$; il suffit, pour l'obtenir, de donner à $v$ une valeur constante déterminée.

Le problème se ramène alors, comme nous l'avons annoncé, au problème de Briot et Bouquet :

*Déterminer dans quel cas l'intégrale de l'équation différentielle*

$$F[f(u), f'(u)] = 0 \tag{4}$$

(*où* F *est un polynome*) *est une fonction uniforme.*

Nous ne suivrons pas, pour le résoudre, la méthode de Briot et Bouquet, mais nous le transformerons une dernière fois pour le généraliser.

Si l'on pose encore

$$f(u) = x,$$
$$\frac{df}{du} = y,$$

on aura

$$F(x, y) = 0,$$
$$du = \frac{dx}{y}, \qquad u = \int \frac{dx}{y},$$

$u$ est alors une intégrale abélienne attachée à la courbe

$$F(x, y) = 0,$$

et la fonction

$$x = f(u)$$

résulte de l'inversion de cette intégrale.

Nous chercherons plus généralement (¹) *à quelles conditions l'inversion de l'intégrale abélienne*

$$z = \int_{x_0, y_0}^{x, y} R(x, y)\, dx \tag{5}$$

*attachée à la courbe*

$$F(x, y) = 0 \tag{6}$$

*donne pour $x$ (et $y$) une fonction uniforme de $z$.*

Nous verrons que : *la courbe (6) est nécessairement de genre zéro ou un, et que les fonctions de $z$ ainsi déterminées sont : soit rationnelles, soit rationnelles d'exponentielles, soit doublement périodiques.*

Les fonctions $x$ et $y$ étant uniformes ne peuvent pas être triplement périodiques; on en conclut que l'intégrale (5) peut avoir *au plus deux* périodes distinctes.

Trois cas seront donc à examiner :

*Premier cas.* — Supposons d'abord qu'il y ait *deux périodes* : $x$ et $y$ sont alors des fonctions *doublement périodiques* de $z$. Il est facile de voir que *la courbe (6) est de genre un.*

Si, en effet, elle était de genre zéro, on pourrait exprimer rationnellement $x$ et $y$ en fonction d'un paramètre $\theta$, $\theta$ pouvant d'ailleurs s'exprimer rationnellement en fonction de $x$ et $y$. Alors $\theta$ serait, par l'intermédiaire de $x$ et $y$, une fonction doublement périodique de $z$. On sait que dans ce cas l'équation

$$\theta(z) = a$$

admet au moins deux racines dans un parallélogramme de périodes. $\left[\frac{1}{\theta(z) - a}\right.$ doit avoir, en effet, deux pôles au moins.$\left.\right]$ Il en résulterait qu'à un *système* de valeurs $(x, y)$ correspondraient au moins deux valeurs distinctes de $z$ ce qui est absurde. Le genre de la courbe est donc *au moins égal à un.*

S'il se trouvait supérieur à un, il existerait au moins deux intégrales distinctes de première espèce

$$I_1 = \int \frac{Q_1(x, y)}{f'_y}\, dx, \qquad I_2 = \int \frac{Q_2(x, y)}{f'_y}\, dx.$$

---

(¹) Cette généralisation, donnée pour la première fois par M. E. Picard dans son Mémoire *Sur les fonctions algébriques de deux variables*, figure dans le *Traité d'Analyse* du même auteur (t. III, 3ᵉ édition, p. 67 et suiv.) avec une marche quelque peu différente de celle que nous allons employer.

Prenons la première de ces intégrales et écrivons-la :

$$\mathrm{I}_1 = \int \frac{Q_1(x, y)}{f'_y} \frac{dx}{dz} dz;$$

la fonction à intégrer

$$\frac{Q_1(x, y)}{f'_y} \frac{dx}{dz}$$

est une fonction doublement périodique de $z$; elle se réduit à une constante puisque, l'intégrale étant de première espèce, elle ne peut avoir de pôles.

On a donc

$$\mathrm{I}_1 = \int a_1 \, dz = a_1 z,$$

et de même

$$\mathrm{I}_2 = \int a_2 \, dz = a_2 z,$$

ce qui est absurde puisque les deux intégrales sont supposées distinctes.

*La courbe est donc bien de genre un* comme nous l'avions dit et l'intégrale proposée (5) n'est autre chose que l'intégrale de première espèce $\mathrm{I}_1$ dont l'inversion se fait de manière uniforme par les fonctions doublement périodiques.

*Deuxième cas.* — Supposons maintenant que $\int \mathrm{R}(x, y) \, dx$ *n'ait pas de périodes*. Il ne peut y avoir alors d'autres singularités que des pôles (même à l'infini), et, puisqu'il s'agit ici de *fonctions uniformes*, l'inversion ne pourra donner que des *fonctions rationnelles ;* il est bien évident qu'alors la courbe (6) est de *genre zéro*.

*Troisième cas.* — C'est de beaucoup le plus compliqué à étudier. Un raisonnement déjà fait (Section II, § 3) montre que l'intégrale

$$\int \mathrm{R}(x, y) \, dx,$$

si elle n'admet qu'une seule période, a forcément des infinis (qui pourront être soit des pôles, soit des infinis logarithmiques). Soit $(a, b)$ un tel point singulier : le développement de l'intégrale au voisinage de ce point sera de la forme

$$(7) \qquad z = \sum \frac{\mathrm{A}_i}{(x - a)^i} + \mathrm{A} \log(x - a) - \mathrm{H},$$

H désignant une fonction holomorphe dans le voisinage du point considéré.

Plusieurs cas sont à examiner :

$\alpha$. *Il n'existe pas de singularités logarithmiques.* — Pour toute valeur finie de $z$, $x$ ne présentera que des pôles comme singularités. Lorsque $z$ tend vers l'infini, $x$ tend vers un des pôles de $z$. En vertu de l'uniformité de $x$, il ne peut exister qu'un seul de ces pôles; il peut d'ailleurs se trouver à distance finie ou infinie, de sorte que le point $z=\infty$ peut être pour $x$ un point ordinaire ou un pôle, mais jamais un point singulier essentiel. $x$ est alors une fonction uniforme ne présentant (même à l'infini) pas d'autres singularités que des pôles, c'est-à-dire une *fonction rationnelle;* $x$ et $y$ s'exprimant rationnellement en fonction de $z$, la courbe (6) est encore du *genre zéro.*

$\beta$. *Il existe des singularités logarithmiques.* — Pour examiner ce cas, il nous sera utile de démontrer un lemme de Weierstrass, dont nous aurons encore à nous servir plus loin.

*Étant donnés : une fonction uniforme ayant un point singulier essentiel $a$, un nombre A arbitraire, un nombre $\eta$ arbitrairement petit, on peut, dans un cercle de rayon aussi petit qu'il soit autour du point $a$, trouver $m$ points $b_1, \ldots, b_m$ tels que*

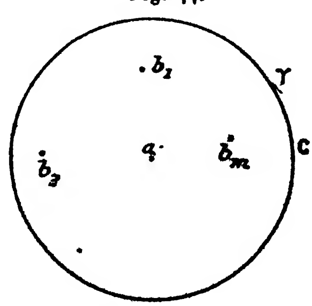
$$f(b_1)=f(b_2)=\ldots=f(b_m),$$
$$|f(b_i)-\mathrm{A}|<\eta,$$

*$m$ étant un entier positif quelconque.*

Ce lemme est une généralisation d'un lemme bien connu auquel il se réduit pour $m=1$.

Supposons le lemme établi pour les $m$ points, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ situés

Fig. 44.



dans le cercle $\gamma$ de rayon $r$ et soit

$$|f(b_i)-\mathrm{A}|=\varepsilon<\eta.$$

Il existe d'après le lemme que nous voulons généraliser un point $c$ tel que

$$|f(c)-f(b_i)| < \eta - \varepsilon,$$

$c$ étant dans un très petit cercle de centre $a$.

On peut alors en vertu de la continuité de $f$, trouver un point $c_i$ voisin de $b_i$ et tel que

$$f(c_i) = f(c),$$

$c_i$ sera dans un petit cercle de centre $b_i$. Si l'on choisit

$$|f(c)-f(b_i)|$$

suffisamment petit, les cercles ainsi construits autour de $a$, $b_1$, ..., $b_m$ n'empiéteront pas les uns sur les autres et l'on aura ainsi $m+1$ points distincts

$$c, \quad c_1, \quad \ldots, \quad c_m,$$

tels que

$$|f(c_i) - \mathrm{A}| < \eta, \qquad f(c_i) = f(c),$$

et le lemme se trouve démontré pour $m+1$ points s'il l'est pour $m$. Il est donc démontré en général puisque nous l'admettons pour $m=1$.

Ceci posé revenons à l'expression

$$(7) \qquad z = \sum \frac{\mathrm{A}_i}{(x-a)^i} + \mathrm{A}\log(x-a) + \mathrm{H}.$$

On en tire aisément

$$(7') \qquad e^{\frac{z}{\mathrm{A}}} = (x-a)\, e^{\sum \frac{\mathrm{A}_i}{(x-a)^i} + \mathrm{H}}$$

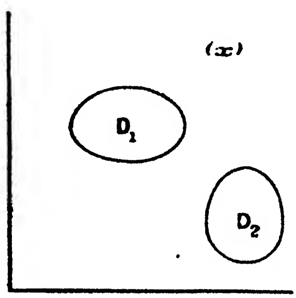
Si les $\mathrm{A}_i$ ne sont pas tous nuls, le point $a$ est singulier essentiel pour la fonction

$$\varphi(x) = e^{\frac{z}{\mathrm{A}}}.$$

D'après le lemme, il existe des valeurs de cette fonction auxquelles correspondent $m$ valeurs de $x$ dans le voisinage de $a$. Autrement dit pour $m$ valeurs distinctes de $x$, $\varphi(x)$ prend une même valeur, soit $\varphi_0$; les valeurs de $z$ correspondantes sont de la forme $z_0 + 2\pi i \mathrm{A}$, et $z$ prend toute cette série de valeurs pour l'une quelconque des valeurs de $x$ considérées (il suffira au besoin de faire décrire à $x$ une courbe fermée autour de $a$); il suffit de ne considérer qu'une seule de ces valeurs, $z_0$ par exemple, pour voir qu'à $m$ valeurs distinctes de $x$ correspond une même valeur de $z$, ce qui est absurde la fonction $x(z)$ devant par hypothèse être uniforme. Il faudra donc que tous les $\mathrm{A}_i$ soient nuls: autrement dit, en un même point, ne pourront se présenter à la fois une singularité polaire et une singularité logarithmique. Nous allons voir que l'existence simultanée de ces deux singularités est impossible même en des points différents, et de plus qu'il ne peut y avoir plus de deux points logarithmiques. La démonstration de ce fait est basée sur la remarque suivante qui est à peu près évidente :

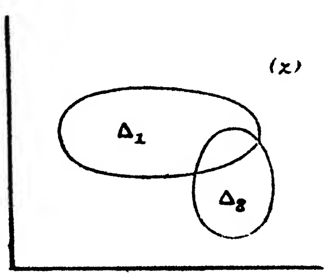
Soient dans le plan des $x$ deux domaines $D_1$ et $D_2$, et dans le plan des $z$

Fig. 45.




les domaines $\Delta_1$ et $\Delta_2$ qui leur correspondent. Si $D_1$ et $D_2$ n'ont pas de parties communes, $\Delta_1$ et $\Delta_2$ ne devront pas en avoir non plus, car sinon

Fig. 46.




à un point de cette partie commune correspondraient un point dans $D_1$ et un point dans $D_2$, de sorte que $x$ ne serait pas fonction uniforme de $z$.

Or au voisinage d'un pôle de $z$ correspond évidemment, dans le plan des $z$, le voisinage du point à l'infini, c'est-à-dire l'ensemble des points extérieurs à une courbe suffisamment éloignée. Cherchons ce qui correspond au voisinage d'un point logarithmique. Posons à cet effet :

$$x = \alpha + i\beta, \qquad z = z' + iz'', \qquad (x - a) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

De

$$z = \mathrm{A}\log(x-a) + \mathrm{H},$$

on tire

$$z' = \alpha\log\rho - \beta\theta + \mathrm{H}', \qquad z'' = \beta\log\rho + \alpha\theta + \mathrm{H}'',$$

$$\alpha z' + \beta z'' = (\alpha^2 + \beta^2)\log\rho + \mathrm{H}_1,$$

$\mathrm{H}_1$ tendant vers une valeur déterminée K pour $x = a$.

En écrivant, pour $\rho$ suffisamment petit,

$$\alpha z' + \beta z'' = (\alpha^2 + \beta^2)\log\rho + \mathrm{K} + \eta,$$

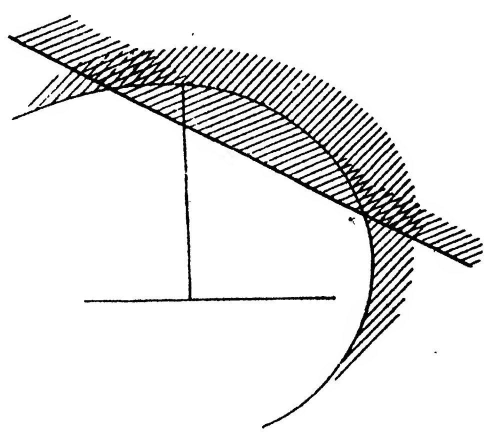
on voit que $\alpha z' + \beta z''$ est très grand et négatif; on peut même dire (en négligeant l'infiniment petit $\eta$) qu'au voisinage $\rho < \varepsilon$ du point $a$ correspond le demi-plan

$$\alpha z' + \beta z'' + \gamma < 0,$$

où $\gamma$ est un nombre positif d'autant plus grand que $\varepsilon$ est petit.

Un tel demi-plan a forcément des parties communes avec le domaine du point à l'infini. De même trois demi-plans ont toujours, quelle que

Fig. 47.



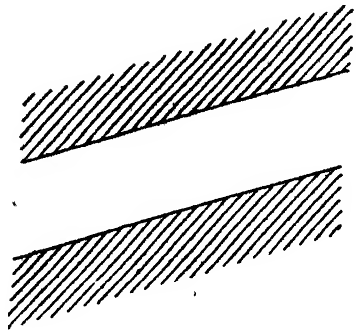
soit leur position respective, des parties communes; il est donc démontré comme nous l'avons annoncé, que les *seules singularités possibles sont des points logarithmiques en nombre au plus égal à deux*. La chose est possible à condition que les deux demi-plans correspondants n'empiètent pas l'un sur l'autre: il faudra donc que les droites

$$\alpha z' + \beta z'' + \gamma = 0,$$

$$\alpha' z' + \beta' z'' + \gamma' = 0.$$

qui les limitent soient parallèles et que les demi-plans soient dirigés en

Fig. 48.



dehors de la bande comprise entre les deux droites : on obtient ainsi les conditions

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = k < 0.$$

D'ailleurs, le point à l'infini étant un point ordinaire pour l'intégrale, si l'on prend $\int R(x, y)\,dx$ le long d'un contour comprenant à son intérieur toutes les singularités, on trouve

$$\Sigma A = 0,$$

ce qui montre qu'il y a *au moins deux points logarithmiques* dont les résidus sont opposés ou encore que

$$k = -1.$$

Si l'on considère alors la fonction

$$\varphi(x) = e^{\frac{z}{A}},$$

les seuls points singuliers de cette fonction seront des pôles (pouvant provenir de points logarithmiques de $z$), c'est donc une fonction rationnelle. Pour que $x$ soit fonction uniforme de $z$, il faudra que $x$ soit fonction uniforme de $\varphi$. L'inversion de $\varphi$ devant alors se faire de façon uniforme donnera une fonction rationnelle; $x$ s'exprimera rationnellement en $e^{\frac{z}{A}}$.

Il est bien évident d'ailleurs que si $\omega$ est la période unique que nous avons supposée pour

$$\int R(x, y)\,dx,$$

on aura nécessairement

$$2\pi i A = m\omega,$$

$x$ et $y$ seront donc *des fonctions rationnelles de l'exponentielle*

$$e^{\frac{2\pi i z}{\omega}}.$$

Le genre de la courbe (6) sera encore zéro.

L'examen de tous les cas est épuisé et montre bien l'exactitude de ce que nous avions annoncé. On en conclut, en revenant au problème primitif qui nous occupait, que les *seules catégories de fonctions uniformes ayant un théorème d'addition algébrique sont celles que nous avons trouvées.*

Réciproquement *toutes ces fonctions possèdent un théorème d'addition;* le fait est connu pour les fonctions rationnelles de la variable ou de l'exponentielle; il suffira donc de le démontrer pour les fonctions doublement périodiques :

Soit en effet $f(x)$ une telle fonction de périodes $\omega$ et $\omega'$; on sait que les équations

$$f(x) = a, \qquad f(y) = b$$

admettent pour racines des expressions de la forme

$$x_i + w, \qquad y_i + w \qquad (w = m\omega + m'\omega'),$$

où les $x_i$ et les $y_i$ sont *en nombre limité.*

A des valeurs données $a$ et $b$ de $f(x)$ et $f(y)$ ne correspond donc *qu'un nombre limité* de valeurs de $f(x+y)$, à savoir les valeurs $f(x_i+y_i)$.

Cela suffit à montrer que la relation entre $f(x+y)$, $f(x)$, $f(y)$ est algébrique en $f(x+y)$. On montre pareillement qu'elle est algébrique en $f(x)$ et $f(y)$.

2. Le problème que nous venons d'examiner avait été traité d'une autre manière par Weierstrass qui le mettait à la base de sa théorie des fonctions elliptiques.

Indiquons la marche suivie par Weierstrass.

Nous supposons donc qu'il existe une relation algébrique

$$g[f(u+v), f(u), f(v)] = 0 \tag{2}$$

de degré $m$ en $f(u+v)$. La fonction $f(u)$ étant supposée méromorphe dans tout le plan, si le point à l'infini n'est pas un point singulier essentiel, la *fonction est rationnelle.*

Si le point à l'infini est un point singulier essentiel, nous pourrons, d'après le lemme démontré plus haut, trouver $m+1$ points *distincts* $b_1, \ldots, b_{m+1}$, tels que

$$f(b_1) = \ldots = f(b_{m+1}).$$

Soit alors l'équation en $t$

$$g[t, f(x), f(b_1)] = 0. \tag{9}$$

Cette équation admet, *quel que soit* $x$, les $m+1$ racines

$$t_i = f(x + b_i) \qquad (i = 1, \ldots, m+1).$$

L'équation n'étant que de degré $m$, deux au moins de ces racines devront être égales, $t_i$ et $t_j$ par exemple.

Nous aurons alors, quel que soit $x$,

$$f(x + b_i) = f(x + b_j),$$

ce qui montre que la fonction admet la période

$$\omega = b_j - b_i \neq 0.$$

Faisons alors le changement de variables

$$u = e^{\frac{2\pi i x}{\omega}},$$

$f(x)$ devient une fonction uniforme $\varphi(u)$ n'admettant plus la période $\omega$. La relation (2) devient

$$G[\varphi(uv), \varphi(u), \varphi(v)] = 0, \tag{10}$$

$\varphi$ peut avoir $0$ et $\infty$ comme points singuliers essentiels; s'il n'en est pas ainsi $\varphi(u)$ est rationnelle en $u$ : $f(x)$ est alors *fonction rationnelle de l'exponentielle* $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$.

Dans le cas où $\varphi(u)$ a une singularité essentielle, en raisonnant comme on vient de le faire, on montrera l'existence d'une relation

$$\varphi(c_i u) = \varphi(c_j u)$$

ayant lieu quel que soit $u$. On pourra écrire

$$\varphi\left(\frac{c_j}{c_i} u\right) = \varphi(u), \qquad \left(\frac{c_i}{c_j} \neq 1\right)$$

En posant

$$\frac{c_i}{c_j} = e^{\frac{2\pi i \omega'}{\omega}}$$

et revenant à la variable $x$, il vient

$$f(x+\omega') = f(x),$$

ce qui montre l'existence d'une seconde période $\omega'$, $f(x)$ est alors *doublement périodique.*

Nous retrouvons donc bien les trois mêmes catégories de fonctions.

## V. — TRANSCENDANTES DE POINCARÉ. APPLICATIONS.

Le problème qui va maintenant nous occuper est, en quelque sorte, une généralisation du précédent. Nous nous proposerons de chercher *s'il existe des systèmes de fonctions uniformes*

$$f_1(t), \quad f_2(t), \quad \ldots, \quad f_n(t),$$

*et telles que l'on ait*

$$f_i(at) = R_i[f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$R_i$ *étant une fonction rationnelle et a un nombre quelconque réel ou imaginaire de module supérieur à un.* Nous dirons qu'un tel système de fonctions, s'il existe, possède un *théorème de multiplication rationnel.* Un exemple simple est donné par la fonction $\lambda(u)$ et sa dérivée. Nous avons vu en effet que

$$\lambda(2u) = R_1[\lambda(u), \lambda'(u)].$$

On en conclut que $\lambda'(2u)$ est rationnel en $\lambda$, $\lambda'$, $\lambda''$; or $\lambda''$ s'exprime rationnellement en $\lambda$ et $\lambda'$; donc,

$$\lambda'(2u) = R_2[\lambda(u), \lambda'(u)].$$

Ce problème a été étudié d'abord par H. Poincaré dans un Mémoire [1] *Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes.* Seul le cas où le point $t=0$ n'est pas singulier essentiel pour les fonctions $f$ est traité dans ce travail. Poincaré détermine de proche en proche les coefficients des séries entières qui satisfont formellement aux relations données. Il s'assure ensuite de la convergence de ces développements.

---

[1] *Journal de Liouville*, 4ᵉ série, t. 6, 1890.

M. E. Picard, dans deux Mémoires (¹) *Sur une classe de transcendantes nouvelles*, a repris le problème *dans le cas général;* la méthode employée est celle des approximations successives; elle est d'ailleurs applicable comme nous allons le voir au cas particulier de Poincaré (²). L'étude du cas général sera faite dans un Chapitre ultérieur.

**1.** Nous nous donnons une substitution rationnelle

$$(1) \qquad X_i = R_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

admettant le point double

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$
$$X_1 = X_2 = \ldots = X_n = 0.$$

Nous nous proposons de *prouver l'existence d'un système de fonctions*

$$f_1(t), \quad \ldots, \quad f_n(t)$$

*s'annulant pour* $t = 0$, *holomorphes au voisinage de ce point et satisfaisant, en outre, au système de relations*

$$(2) \qquad f_i(at) = R_i[f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

*dans lesquelles a est un nombre de module supérieur à un.*

Nous supposerons que l'on a pu, en développant $R_i$ au voisinage du point O, mettre le système (1) sous la forme

$$(1') \qquad X_i = a_i x_i + r_i[x_1, x_2, \ldots, x_n] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$r_i$ ne contenant que des termes du second degré et *les $a_i$ n'étant pas nécessairement distincts.*

Posons

$$f_i(t) = A_i t + F_i(t)$$

et substituons dans (2); il vient

$$(3) \qquad a A_i t + F_i(at) = a_i A_i t + a_i F_i(t) + r_i[f_1(t), \ldots, f_n(t)].$$

Les $F_i$ ne possédant, non plus que les $r_i$, de termes du premier degré en $t$, on aura nécessairement

$$(a - a_i) A_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

(¹) *Acta Mathematica*, t. XVIII et XXIII; *Annales de l'École Normale* 1913.
(²) E. Picard, *Bull. Soc. Math.*, XXVIII, 1900; *Comptes rendus*, 14 juillet 1904.

ce qui entraîne soit

$$A_i = 0,$$

soit

$$a_i = a.$$

Nous nous contenterons pour commencer d'examiner le cas où

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a.$$

Les $A_i$ peuvent alors être choisis arbitrairement et les fonctions $f_i$ sont déterminées par le système d'équations

$$(3') \left\{ \begin{array}{l} f_i(t) = A_i t + F_i(t) \\ F_i(at) = a\,F_i(t) + r_i[A_1 t + F_1, \ldots, A_n t + F_n] = a\,F_i(t) + P_i(t, F_1, \ldots, F_n) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{array} \right.$$

$P_i$ étant une série entière en $t$, $F_1, \ldots, F_n$ commençant par des termes du second degré.

Avant de poursuivre, faisons la remarque suivante qui nous sera fort utile : *$t$ ne figure dans $P_i$ que sous les formes*

$$A_1 t, \quad A_2 t, \quad \ldots, \quad A_n t,$$

de sorte que dans le développement de $P_i$, *un terme contenant $t^p$ aura pour coefficient un polynome homogène et de degré $p$ en $A_1$, $A_2, \ldots, A_n$.*

Pour simplifier l'écriture nous nous bornerons, dans ce qui va suivre, au cas où $n$ est égal à deux. Le problème à résoudre sera par exemple de déterminer F et $\Phi$ (sans termes du premier degré) satisfaisant aux relations

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} F(at) = a\,F(t) + P(t, F, \Phi), \\ \Phi(at) = a\,\Phi(t) + Q(t, F, \Phi), \end{array} \right.$$

où P et Q n'ont pas de termes du premier degré.

Nous déterminerons deux fonctions $F_1$ et $\Phi_1$ par les équations

$$F_1(at) = a\,F_1(t) + P(t, 0, 0),$$
$$\Phi_1(at) = a\,\Phi_1(t) + Q(t, 0, 0),$$

puis $F_2$ et $\Phi_2$ par les équations

$$F_2(at) = a\,F_2(t) + P(t, F_1, \Phi_1),$$
$$\Phi_2(at) = a\,\Phi_2(t) + Q(t, F_2, \Phi_2),$$

et de proche en proche $F_n$ et $\Phi_n$ par

$$(4')\quad \begin{cases} F_n(at) = a\,F_n(t) + P(t, F_{n-1}, \Phi_{n-1}), \\ \Phi_n(at) = a\,\Phi_n(t) + Q(t, F_{n-1}, \Phi_{n-1}). \end{cases}$$

Si $F_n$ et $\Phi_n$ existent effectivement et ont des limites pour $n$ infini, ces limites satisferont évidemment aux équations (4).

Toutes les équations que nous avons à résoudre pour déterminer les fonctions d'approximation $F_n$ et $\Phi_n$, sont de la forme

$$(5)\qquad \psi(at) = a\,\psi(t) + S(t),$$

$S(t)$ désignant une fonction connue [1] holomorphe dans le voisinage de l'origine, c'est-à-dire dans un cercle C de rayon R et sur sa circonférence : son développement est de la forme

$$S = \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_n t^n + \ldots.$$

Posons

$$\psi(t) = A_2 t^2 + \ldots + A_n t^n + \ldots.$$

Il vient, en identifiant les deux membres de (5),

$$A_n a^n = A_n a + \alpha_n;$$

or puisque $|a| > 1$, on a forcément

$$a^n - a \neq 0$$

et par conséquent

$$A_n = \frac{\alpha_n}{a^n - a}.$$

Soit M le maximum du module de $S(t)$ sur le cercle C; on aura

$$|\alpha_n| < \frac{M}{R^n}$$

et dans le cercle

$$|\alpha_n t^n| < M\left(\frac{t}{R}\right)^n < M,$$

$$\left|\sum A_i t^i\right| < M \sum \left|\frac{1}{a^n - a}\right|.$$

La série $\sum \left|\frac{1}{a^n - a}\right|$ est convergente puisque $|a| > 1$; soit $k$ sa somme.

---

[1] En réalité, nous ne pouvons momentanément affirmer l'holomorphisme que pour $P(t, 0, 0)$ et $Q(t, 0, 0)$ qui servent à déterminer $F_1$ et $\Phi_1$. Le raisonnement que nous allons faire montre que $F_1$ et $\Phi_1$ sont holomorphes, et de petit module dans C. Alors $P(t, F_1, \Phi_1)$, $Q(t, F_1, \Phi_1)$ sont holomorphes et l'on aboutit de proche en proche à l'affirmation du texte.

On voit que la série trouvée pour $\psi$ est convergente en même temps que la série S; de plus *on a dans le cercle* C

$$|\psi(t)| < k.M,$$

*k étant un nombre ne dépendant que de a.*

Ceci établi revenons au système $(4')$ et supposons que l'on ait

$$|F_{n-1}(t)| < M_{n-1},$$
$$|\Phi_{n-1}(t)| < M_{n-1},$$

dans un cercle de rayon R et sur sa circonférence. On aura dans ce même cercle

$$|F_n(t)| < k.p(R, M_{n-1}, M_{n-1}),$$
$$|\Phi_n(t)| < k.p(R, M_{n-1}, M_{n-1}),$$

en désignant par $p(t, F, \Phi)$ une fonction majorante à la fois de P et Q. On aura donc pour le maximum $M_n$ de $|F_n|$ et de $|\Phi_n|$,

$$M_n \leqq k.p(R, M_{n-1}, M_{n-1}).$$

Remarquons que dans les équations qui servent à déterminer $F_1$ et $\Phi_1$, on peut écrire

$$M_0 = 0.$$

Si l'on pose alors

$$p(R, x, x) = \varpi(R, x),$$

puis

$$x_1 = k.\varpi(R, 0),$$
$$x_2 = k.\varpi(R, x_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = k.\varpi(R, x_{n-1}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On a évidemment

$$M_n \leqq x_n.$$

Il est clair, d'ailleurs, d'après la loi même de formation des quantités $x_n$, qu'elles vont en croissant.

Rappelons un résultat bien connu : Soit l'équation

$$x = \varphi(x).$$

Supposons qu'elle ait une racine $\xi$ pour laquelle

$$|\varphi'(\xi)| < 1;$$

on peut alors déterminer un intervalle $(\alpha, \beta)$, dont $\xi$ est le milieu, tel que l'on ait dans tout cet intervalle

$$|\varphi'(\xi)| < q < 1.$$

Si l'on prend $x_0$ dans cet intervalle et si l'on pose

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi(x_0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n &= \varphi(x_{n-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

*$x_n$ a une limite qui est précisément* $\xi$; on a en effet

$$|x_1 - \xi| = |\varphi(x_0) - \varphi(\xi)| < |x_0 - \xi|.q$$

$x_1$ étant plus près de $\xi$ que $x_0$, on a encore

$$|x_2 - \xi| < |x_1 - \xi|.q < |x_0 - \xi|.q^2$$

et plus généralement

$$|x_n - \xi| < |x_0 - \xi|.q^n,$$

ce qui montre bien que $x_n$ tend vers $\xi$.

Or l'équation

$$x = k.\varpi(R, x)$$

a, si R est suffisamment petit, une racine $\xi$ voisine de o (elle est de l'ordre de $R^2$) (¹). La dérivée de $\varpi(R, x)$ pour $x = \xi$ est aussi très petite (de l'ordre de R), elle a donc un module inférieur à 1 : o est compris dans un intervalle $\alpha$, $\beta$ où cette dérivée est inférieure à un nombre $q$ inférieur à 1; donc

$$x_n = k.\varpi(R, x_{n-1})$$

tend vers $\xi$.

On aura donc toujours

$$M_n \leqq x_n < \xi,$$

$\xi$ étant un nombre fixe d'ailleurs très petit avec R.

Cela ne suffit pas encore pour affirmer l'existence d'une limite pour $F_n$ et $\varphi_n$; nous chercherons pour cela une limite supérieure $\mu_n$ de

$$|F_n(t) - F_{n-1}(t)|.$$

On a

$$\begin{aligned} &F_n(at) - F_{n-1}(at) \\ &\quad = a[F_n(t) - F_{n-1}(t)] + P[t, F_{n-1}, \Phi_{n-1}] - P[t, F_{n-2}, \Phi_{n-2}]. \end{aligned}$$

(¹) Il suffit pour le voir de développer $\varpi$ en série.

D'après ce qui précède

$$|P(t, F_{n-1}, \Phi_{n-1}) - P(t, F_{n-2}, \Phi_{n-2})| < \lambda.\mu_{n-1},$$

$\lambda$ étant un nombre indépendant de $n$ et très petit avec R.

Les résultats établis pour l'équation (5) s'appliquent ici à la fonction

$$F_n(t) - F_{n-1}(t).$$

et l'on a

$$\mu_n < k.\lambda.\mu_{n-1}.$$

Si donc R est pris assez petit pour que $k\lambda$ soit inférieur à l'unité, la série

$$F_1 + (F_2 - F_1) + \ldots + (F_n - F_{n-1}) + \ldots$$

converge uniformément dans le cercle de rayon R, et $F_n$ a une limite F qui est la somme de cette série. Le même raisonnement prouve l'existence d'une limite $\Phi$ pour $\Phi_n$. F et $\Phi$ sont des fonctions holomorphes toutes deux dans le cercle de rayon R, et satisfaisant dans ce cercle aux équations (4). Ces équations elles-mêmes permettront, puisque $|a| > 1$, de prolonger uniformément F et $\Phi$ dans tout le plan suivant le procédé indiqué à plusieurs reprises; les fonctions $R_i$ étant rationnelles on n'introduira ainsi d'autres singularités que des pôles. En résumé, *on a déterminé un système* F, $\Phi$ *de fonctions uniformes, méromorphes dans tout le plan à distance finie et solutions du système* (4). $f$ *et* $\varphi$ *s'en déduisent immédiatement.*

*Remarque.* — Si les $a_i$ ne sont pas tous égaux, il ne s'ensuit pas grande difficulté.

Posons

$$K(s) \equiv (a_1 - s)(a_2 - s)\ldots(a_n - s).$$

Si l'on veut que l'un au moins des $A_i$ ne soit pas nul il faudra — nous l'avons vu — que l'un au moins des $a_i$ soit égal à $a$, c'est-à-dire que l'équation

$$K(s) = 0$$

ait au moins une racine égale à $a$.

Dans ce cas les fonctions $f_i$ pour lesquelles $a_i$ est différent de $a$, n'ont pas de termes du premier degré et le nombre des arbitraires $A_i$ dont dépend la solution est diminué d'autant. Les raisonnements sont d'ailleurs absolument les mêmes, à cela près que l'on devra remplacer la série

$$k = \sum \frac{1}{a^n - a}$$

par la série

$$h_i = \sum \frac{1}{a^n - a_i},$$

dans la résolution de l'equation

$$F_i(at) = a_i F_i(t) + S(t);$$

ceci suppose évidemment que l'on ait

$$K(a^2) \neq 0, \quad K(a^3) \neq 0, \quad \ldots, \quad K(a^p) \neq 0. \quad \ldots.$$

Si maintenant on suppose

$$K(a) \neq 0,$$

les fonctions $f$ n'auront pas de termes du premier degré; on pourra déterminer des termes du second degré non tous nuls à condition (il est aisé de s'en assurer) que $K(a^2)$ soit nul.

Pour pouvoir déterminer les coefficients suivants on devra supposer

$$K(a^p) \neq 0 \qquad \text{pour } p \geq 3$$

et ainsi de suite.

Si, quel que soit $p$, ($p = 1, 2, \ldots$) on avait $K(a^p) \neq 0$, on n'obtiendrait qu'une solution identiquement nulle. En conclusion *on n'obtiendra de solution holomorphe au voisinage de l'origine que si l'expression* $K(a^p)$ *s'annule pour une valeur de p et une seulement.*

**2.** Il est bien évident que si les seconds membres des substitutions (1) sont des polynomes, le prolongement des solutions dans tout le plan n'introduit aucun pôle, et les solutions sont des fonctions entières. Il est aisé de mettre dans le cas géneral les solutions méromorphes trouvées sous forme de quotients de fonctions entières. Prenons encore le cas des deux équations

$$f(at) = R_1[f(t), \varphi(t)],$$
$$\varphi(at) = R_2[f(t), \varphi(t)].$$

Nous supposerons que le seul terme du premier degré dans $R_1$ est $af(t)$ et dans $R_2$, $a\varphi(t)$.

On peut alors sans diminuer la généralité (en multipliant au besoin haut et bas par des expressions convenables) admettre que $R_1$ et $R_2$ ont même dénominateur, ce dénominateur se réduisant à 1 pour $f = \varphi = 0$.

On peut alors écrire

$$R_1 = \frac{H_1}{1 + H},$$

$$R_2 = \frac{H_2}{1 + H},$$

les polynomes $\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Pi_3$ s'annulant pour $f = \varphi = 0$ et ayant respectivement comme termes du premier degré

$$a f(t), \quad a\varphi(t), \quad \alpha f(t) + \beta\varphi(t).$$

Faisons sur $f$ et $\varphi$ la substitution

$$\left(f, \varphi; \frac{f}{1+\chi}, \frac{\varphi}{1+\chi}\right).$$

Il vient, après avoir chassé le dénominateur $1+\chi$ dans le second membre,

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{f(at)}{1+\chi(at)} &= \frac{P_1(f, \varphi, \chi)}{1+P_3(f, \varphi, \chi)}, \\ \frac{\varphi(at)}{1+\chi(at)} &= \frac{P_2(f, \varphi, \chi)}{1+P_3(f, \varphi, \chi)}. \end{aligned}\right.$$

Si $m$ est le plus grand des degrés de $P_1$, $P_2$, $P_3$, les termes du premier degré seront, dans $P_1$, $P_2$, $P_3$ respectivement,

$$a f(t), \quad a\varphi(t), \quad \alpha f + \beta\varphi + m\chi,$$

$m\chi$ provenant du dénominateur chassé

$$(1+\chi)^m.$$

Il suffira évidemment pour satisfaire à (7) de prendre

$$(7')\qquad \left\{\begin{aligned} f(at) &= P_1(f, \varphi, \chi) = af + \ldots, \\ \varphi(at) &= P_2(f, \varphi, \chi) = a\varphi + \ldots, \\ \chi(at) &= P_3(f, \varphi, \chi) = \alpha f + \beta\varphi + m\chi + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Si l'on fait la substitution

$$[f, \varphi, \chi; f, \varphi, \chi + Af + B\varphi],$$

on pourra toujours ramener ce système à la forme canonique. La troisième équation devient en effet

$$\chi(at) + A f(at) + B\varphi(at) = \alpha f + \beta\varphi + m\chi - mAf - mB\varphi + \ldots$$

et en tenant compte des deux premières

$$\chi(at) = [\alpha - A(a-m)]f + [\beta - B(a-m)]\varphi + m\chi(t) + \ldots,$$

et il suffira de prendre

$$A = \frac{\alpha}{a-m}, \qquad B = \frac{\beta}{a-m},$$

ce qui exige que l'on ait

$$a \neq m$$

condition que l'on peut toujours réaliser, en multipliant au besoin les termes des fractions en P par un même facteur.

On a donc finalement un système du type (1) avec, aux seconds membres, des polynomes. On pourra donc trouver un système $f, \varphi, \chi$ de solutions entières. Il n'y a pas lieu de s'étonner de l'indétermination que notre solution introduit dans la recherche des fonctions $f, \varphi, \chi$, le problème de la représentation d'une fonction méromorphe par un quotient de fonctions entières étant lui-même fort indéterminé.

3. Nous avons remarqué au paragraphe 1 que dans le développement de $P_i(t, F_1, \ldots, F_n)$ [équations (3')], le coefficient d'un terme contenant $t^p$ est un polynome homogène et de degré $p$ en $A_1, \ldots, A_n$. Cela est vrai en particulier pour $P_i(t, 0, 0, \ldots, 0)$ de sorte que cela est encore vrai (d'après la façon même dont on a formé leurs développements) pour les fonctions de première approximation; en remontant de proche en proche on voit que c'est encore vrai pour les solutions même des équations (3'). On peut alors dire ($A_1, A_2, \ldots, A_n$ étant des arbitraires) que ces solutions sont des fonctions des variables indépendantes

$$u_1 = A_1 t, \qquad u_2 = A_2 t, \qquad \ldots, \qquad u_n = A_n t.$$

On a donc résolu le problème suivant :

*Déterminer un système de n fonctions uniformes de n variables*

$$f_1(u_1, \ldots, u_n), \qquad \ldots, \qquad f_n(u_1, \ldots, u_n)$$

*s'annulant pour $u_1 = \ldots u_n = 0$, holomorphes au voisinage de ce point, et satisfaisant aux relations*

$$f_i(au_1, au_2, \ldots, au_n) = R_i(f_1, f_2, \ldots, f_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$R_i$ *ayant comme seul terme du premier degré* $af_i$ ($|a| > 1$.

Ceci suggère même une généralisation encore plus étendue ([1]). On peut prendre pour les diverses variables des multiplicateurs différents. Soient par exemple

$$|a| > 1, \qquad |b| > 1.$$

On *pourra trouver des fonctions uniformes $f(u, v)$, $\varphi(u, v)$ satis-*

([1]) E. Picard, *Comptes rendus*, 1904, Note citée.

*faisant au système*

$$f(au, bv) = R_1[f(u, v), \varphi(u, v)],$$
$$\varphi(au, bv) = R_2[f(u, v), \varphi(u, v)],$$

*en supposant*

$$R_1 = af + \ldots,$$
$$R_2 = b\varphi + \ldots.$$

On pose pour cela

$$f(u, v) = u + F(u, v),$$
$$\varphi(u, v) = v + \varphi(u, v).$$

On procède comme plus haut par approximations successives pour déterminer F et $\Phi$.

On aura à examiner des équations de la forme

$$F(au, bv) = a F(u, v) + P(u, v).$$

En posant

$$\left.\begin{aligned} F(u, v) &= \Sigma B_{pq} u^p v^q \\ P(u, v) &= \Sigma A_{pq} u^p v^q \end{aligned}\right\} \quad (p + q \geqq 2),$$

et en identifiant, on trouve

$$B_{pq}(a^p b^q - a) = A_{pq}.$$

Pour qu'il soit possible de déterminer tous les coefficients B il sera nécessaire et suffisant que l'on ait

$$a^p b^q - a \neq 0,$$

quels que soient $p$ et $q$.

L'équation en $\Phi$ conduit de même à la condition

$$a^p b^q - b \neq 0.$$

On devra avoir en particulier

$$a \neq b^k,$$
$$b \neq a^h,$$

quels que soient $h$ et $k$.

Si ces conditions sont satisfaites on poursuivra le raisonnement d'approximations successives comme on l'a déjà fait; puis, les modules de $a$ et de $b$ étant supérieurs à l'unité, on pourra prolonger les fonctions trouvées de façon uniforme.

4. Revenons au cas où les multiplicateurs sont égaux. Il mérite une attention spéciale dans le cas où les substitutions rationnelles envisagées sont du type de Crémona, c'est-à-dire birationnelles.

Nous nous bornons toujours au cas de deux équations.

Nous supposons donc que l'inversion du système

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} X = R_1(x, y), \\ Y = R_2(x, y), \end{cases}$$

peut se faire par des fonctions rationnelles

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} x = \rho_1(X, Y), \\ y = \rho_2(X, Y). \end{cases}$$

On peut déterminer deux fonctions $f(u, v)$, $\varphi(u, v)$ uniformes et s'annulant pour $u = v = 0$, telles que

$$f(au, av) = R_1[f(u, v), \varphi(u, v)],$$
$$\varphi(au, av) = R_2[f(u, v), \varphi(u, v)].$$

Il vient, d'après (II) $\left(\text{en changeant } u \text{ en } \frac{u}{a}, v \text{ en } \frac{v}{a}\right)$,

$$f\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{a}\right) = \rho_1[f(u, v), \varphi(u, v)],$$
$$\varphi\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{a}\right) = \rho_2[f(u, v), \varphi(u, v)],$$

et par conséquent $f(a^n u, a^n v)$, $\varphi(a^n u, a^n v)$ s'exprimeront rationnellement en fonction de $f(u, v)$ et $\varphi(u, v)$ que $n$ soit un entier positif ou négatif.

Ceci nous sera utile pour étudier certaines propriétés des fonctions $u$ et $v$ inverses de

$$x = f(u, v),$$
$$y = \varphi(u, v).$$

Soient

$$u = F(x, y),$$
$$v = \Phi(x, y),$$

ces fonctions; nous allons voir qu'elles n'existent pas forcément pour tous les systèmes $(A, B)$ de valeurs de $x, y$. Supposons en effet qu'au point $(A, B)$ $u$ et $v$ soient définies et prennent les valeurs $u_0$, $v_0$, et considérons la suite de nombres

$$\rho_1(A, B), \qquad \rho_1^{(2)}(A, B) = \rho_1[\rho_1(A, B), \rho_2(A, B)],$$
$$\rho_2(A, B), \qquad \rho_2^{(2)}(A, B) = \rho_2[\rho_1(A, B), \rho_2(A, B)],$$

et plus généralement

$$\rho_1^{(n)}(A, B) = \rho_1[\rho_1^{(n-1)}(A, B), \rho_2^{(n-1)}(A, B)],$$
$$\rho_2^{(n)}(A, B) = \rho_2[\rho_1^{(n-1)}(A, B), \rho_2^{(n-1)}(A, B)].$$

que l'on obtient en itérant la substitution $\rho_1$, $\rho_2$ à partir des valeurs numériques données A, B. On aura évidemment

$$\rho_1^{(n)}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = f\left(\frac{u_0}{a^n}, \frac{v_0}{a^n}\right),$$
$$\rho_2^{(n)}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \varphi\left(\frac{u_0}{a^n}, \frac{v_0}{a^n}\right),$$

puisque l'on a par hypothèse

$$\mathrm{A} = f(u_0, v_0),$$
$$\mathrm{B} = \varphi(u_0, v_0).$$

On peut prendre $n$ assez grand pour abaisser les modules de $\frac{u_0}{a^n}$, $\frac{v_0}{a^n}$ au-dessous de toute quantité donnée. Or $f$ et $\varphi$ tendent vers zéro avec $u$ et $v$. A *et* B *devront donc être tels que*

$$\rho_1^{(n)}(\mathrm{A}, \mathrm{B}), \qquad \rho_2^{(n)}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$$

*tendent vers zéro pour* $n = \infty$.

Soit D le domaine formé par les points ou cette condition est remplie. Nous démontrerons maintenant que *réciproquement* $u$ *et* $v$ *sont déterminées en tout point de* D *et de plus uniformes dans ce domaine.*

Reprenons à cet effet les systèmes (I) et (II) avec

$$x = f(u, v),$$
$$y = \varphi(u, v),$$
$$\mathrm{X} = f(au, bv) = f(\mathrm{U}, \mathrm{V}),$$
$$\mathrm{Y} = \varphi(au, bv) = \varphi(\mathrm{U}, \mathrm{V}).$$

Les fonctions inverses

$$u = \mathrm{F}(x, y),$$
$$v = \Phi(x, y),$$

sont uniformes pourvu que $x$ et $y$ soient assez voisins de zéro : soient

$$|x| < r, \qquad |y| < r.$$

Les relations écrites plus haut serviront alors à définir

$$\mathrm{U} = \mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}),$$
$$\mathrm{V} = \Phi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}),$$

dans un domaine plus étendu ; on aura, en effet,

$$\mathrm{U} = au = a\,\mathrm{F}(x, y) = a\,\mathrm{F}[\rho_1(\mathrm{X}, \mathrm{Y}), \rho_2(\mathrm{X}, \mathrm{Y})],$$
$$\mathrm{V} = av = a\,\Phi(x, y) = a\,\Phi[\rho_1(\mathrm{X}, \mathrm{Y}), \rho_2(\mathrm{X}, \mathrm{Y})].$$

On pourra, en répétant ce procédé, atteindre ainsi tout point A, B de D :

On peut en effet par hypothèse trouver un nombre $n$ assez grand pour que $\rho_1^{(n)}$ (A, B), $\rho_2^{(n)}$(A, B) soient en module inférieurs à $\mu$; on a alors

$$F(A, B) = a^n F[\rho_1^{(n)}(A, B), \rho_2^{(n)}(A, B)],$$
$$\Phi(A, B) = a^n \Phi[\rho_1^{(n)}(A, B), \rho_2^{(n)}(A, B)],$$

et ceci nous prouve à la fois que $u$ et $v$ sont bien *déterminées et uniformes en tout point du domaine* D. Il n'intervient en effet dans les opérations de prolongement que nous venons de faire que les fonctions rationnelles $\rho_1$ et $\rho_2$.

Sur le domaine D lui-même on ne sait pas grand chose; tout dépend des propriétés de la substitution rationnelle envisagée lorsqu'on l'itère. Ce point de vue a été assez peu étudié jusqu'à présent. Il est difficile de savoir en général si les itérés successifs d'un point (A, B) donné ont pour seul point limite le point (o, o), et par conséquent de caractériser le domaine D pour lequel il en est ainsi. Dans le Mémoire déjà cité H. Poincaré a formé des exemples pour lesquels D contient tout l'espace correspondant aux deux variables complexes. Mais en général D peut ne représenter qu'une portion limitée de cet espace.

*Remarque.* — Il peut arriver que pour certains points $(x, y)$ du domaine D, l'itération envisagée plus haut ne conduise pas à un point limite déterminé. Il en est ainsi si $(x, y)$ est un point fondamental $(\alpha, \beta)$ pour la substitution (II) ou plus généralement s'il est point fondamental pour la substitution itérée $k$ fois; dans ce dernier cas $(x, y)$ est le transformé d'un point $(\alpha, \beta)$ par la substitution $(R_1, R_2)^{(k-1)}$. De tels points sont pour F et $\Phi$ des points d'indétermination.

5. On peut tenter d'appliquer les résultats de l'étude précédente à l'étude des surfaces ou hypersurfaces admettant une transformation rationnelle (¹) en elles-mêmes.

Soit, en général, une hypersurface algébrique d'équation

$$(S) \qquad F(x_1, \ldots, x_{m+1})$$

ayant à l'origine un point simple avec, pour fixer les idées, $\dfrac{\partial F}{\partial x_{m+1}} \neq 0$.

(¹) E. Picard, *Bull. de la Société Math. de France*, t. 28, note citée; voir aussi *Fonctions algébriques de deux variables*, t. II, note I.

Supposons que cette surface admette la transformation rationnelle

$$
(\mathrm{A}) \quad \begin{cases}
X_1 = R_1(x_1, \ldots, x_{m+1}) = a_1 x_1 + r_1(x_1, \ldots, x_{m+1}), \\
X_2 = R_2(x_1, \ldots, x_{m+1}) = a_2 x_2 + r_2(x_1, \ldots, x_{m+1}), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
X_{m+1} = R_{m+1}(x_1, \ldots, x_{m+1}) = a_{m+1} x_{m+1} + r_{m+1}(x_1, \ldots, x_{m+1}),
\end{cases}
$$

avec

$$|a_1| > 1, \qquad |a_2| > 1, \qquad \ldots.$$

On pourra toujours obtenir de cette surface une représentation paramétrique *uniforme et méromorphe*, en opérant de la façon suivante :

On peut de l'équation (S) tirer pour $x_{m+1}$, un développement en série

$$x_{m+1} = \Phi(x_1, \ldots, x_m)$$

uniforme et holomorphe au *voisinage de l'origine*.

Si l'on transporte ce développement dans les $m$ premières équations de (A), on obtient le système

$$(\mathrm{B}) \quad X_i = P_i(x_1, \ldots, x_m) = a_i x_i + p_i(x_1, \ldots, x_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

dans lequel $p_i$ désigne une série *holomorphe au voisinage de l'origine* et sans termes du premier degré. En raisonnant comme on sait le faire, on pourra déterminer des fonctions

$$f_1(u_1, \ldots, u_m), \quad \ldots, \quad f_m(u_1, \ldots, u_m),$$

satisfaisant aux relations

$$
(\mathrm{B}') \quad \begin{cases}
f_i(a_1 u_1, \ldots, a_m u_m) = P_i[f_1(u_1, \ldots, u_m), \ldots, f_m(u_1, \ldots, u_m)] \\
\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, m).
\end{cases}
$$

Ces fonctions sont uniformes et holomorphes au *voisinage de l'origine* mais *nous ne pouvons pas les prolonger pour le moment*, les $P_i$ n'étant pas des fonctions rationnelles.

Si l'on pose alors

$$
\begin{aligned}
x_i &= f_i(u_1, \ldots, u_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \\
x_{m+1} &= \Phi[f_1, \ldots, f_m] = f_{m+1}(u_1, \ldots, u_m),
\end{aligned}
$$

on obtient ainsi une représentation paramétrique de la surface valable au voisinage de l'origine. En utilisant le système (B′) on voit que l'on a

$$X_i = P_i[x_1, \ldots, x_m] = f_i(a_1 u_1, \ldots, a_m u_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

$X_1, \ldots, X_{m+1}$ est le point de la surface qui correspond aux valeurs

$a_1 u_1, \ldots, a_m u_m$ des paramètres et l'on a aussi

$$X_{m+1} = f_{m+1}(a_1 u_1, \ldots, a_m u_m).$$

On en conclut pour la fonction $f_{m+1}$ la relation

$$f_{m+1}(a_1 u_1, \ldots, a_m u_m) = R_{m+1}[f_1(u_1, \ldots, u_m), \ldots, f_{m+1}(u_1, \ldots, u_m)].$$

Les fonctions $f_1, \ldots, f_{m+1}$ satisfont donc en définitive au système des relations

$$f_i(a_1 u_1, \ldots, a_m u_m) = R_i[f_1(u_1, \ldots, u_m), \ldots, f_m(u_1, \ldots, u_m)]$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m+1),$$

dans lequel les seconds membres sont maintenant des *fonctions rationnelles*, ce qui permet d'étendre *à toutes* les valeurs des $n$ variables $u$, les fonctions $f_i$, *sans introduire d'autres singularités que des pôles*.

La représentation obtenue est donc bien partout *uniforme et méromorphe*.

Examinons le *cas d'une courbe*. Soit

$$F(x, y) = 0$$

son équation; le fait que cette courbe admet une transformation rationnelle

$$X = R_1(x, y),$$
$$Y = R_2(x, y),$$

du type étudié, nous permet, on vient de le voir, d'en trouver la représentation paramétrique

$$x = f(u),$$
$$y = \varphi(u),$$

uniforme dans tout le plan des $u$.

$f(u)$ et $\varphi(u)$ sont alors deux fonctions uniformes méromorphes liées par la relation algébrique

$$F[f(u), \varphi(u)] = 0.$$

M. E. Picard a montré [1] que s'il en est ainsi la relation F ne peut être que de genre zéro ou de genre un.

*Toute courbe admettant une transformation rationnelle en elle-même du type considéré, est donc au plus de genre un.*

---

[1] E. Picard, *Acta Math.*, t. VI. Le théorème démontré par M. Picard est d'ailleurs plus général et s'applique pourvu que $f$ et $\varphi$ soient des fonctions uniformes *n'ayant que des points essentiels isolés*.

On peut d'ailleurs le montrer autrement : $|a|$ étant supérieur à 1, la courbe admet une *infinité discontinue* de transformations en elle-même; ces transformations font correspondre le point

$$x = f(u), \qquad y = \varphi(u)$$

aux points

$$x' = f(a^n u), \qquad y' = \varphi(a^n u) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Cela ne pourra arriver si le genre est supérieur à l'unité. Supposons en effet que le genre soit $p > 1$, on peut alors attacher à la courbe $p$ intégrales abéliennes de première espèce linéairement indépendantes

$$\int \frac{Q_1(x, y)}{F'_y} dx, \quad \ldots, \quad \int \frac{Q_p(x, y)}{F'_y} dx.$$

Si l'on considère une transformation rationnelle quelconque de la courbe en elle-même, qui change $x, y$ en X, Y, l'intégrale abélienne

$$\int \frac{Q_1(X, Y)}{F'_Y} dX$$

étant encore de première espèce et attachée à la même courbe sera nécessairement une combinaison linéaire des $p$ premières. Il en sera de même de

$$\int \frac{Q_2(X, Y)}{F'_Y} dX,$$

et l'on pourra écrire

$$\frac{Q_1(X, Y)}{Q_2(X, Y)} = \frac{A_1 Q_1(x, y) + \ldots + A_p Q_p(x, y)}{B_1 Q_1(x, y) + \ldots + B_p Q_p(x, y)}.$$

Les conditions exprimant que X et Y sont rationnelles en $x$, $y$, se traduiront par des relations algébriques entre les constantes A et B; ces dernières seront par conséquent déterminées en nombre fini, ou bien elles devront dépendre d'au moins un paramètre arbitraire.

Si donc la courbe admet une *infinité de transformations en elle-même*, elle en admet forcément une *infinité dépendant d'un paramètre*, soit :

$$X = R_1(x, y; \theta),$$
$$Y = R_2(x, y; \theta).$$

Si l'on a $p > 1$ on aura, comme nous l'avons vu,

$$\int_{X_0, Y_0}^{X, Y} \frac{Q_1(X, Y)\, dX}{F'_Y} = A_1 \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{Q_1(x, y)\, dx}{F'_y} + \ldots + A_p \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{Q_p(x, y)\, dx}{F'_y},$$

les A dépendant algébriquement du paramètre $\theta$ ; cela ne se peut puisque l'intégrale du premier membre étant de première espèce ne peut pas devenir infinie. Les A sont donc des constantes. Pour la même raison, les B seront aussi des constantes de sorte que la transformation ne dépend plus d'aucun arbitraire ce qui est contradictoire.

*On a donc forcément soit $p = 0$, soit $p = 1$.*

On peut déterminer effectivement la forme des représentations paramétriques obtenues par cette méthode pour de telles courbes.

1° $p = 0$. Si la courbe $F(x, y) = 0$ est unicursale on sait que l'on peut exprimer $x$ et $y$ en fonctions rationnelles d'un paramètre $\theta$,

$$x = \varphi_1(\theta),$$
$$y = \varphi_2(\theta),$$

$\theta$ étant lui-même une fonction rationnelle en $x$, $y$.

Soit

$$x = f(u),$$
$$y = \varphi(u),$$

la représentation trouvée par les considérations précedentes; on a

$$X = f(au) = R_1(x, y),$$
$$Y = \varphi(au) = R_2(x, y),$$

$\theta$ sera une fonction de $u$ à déterminer; on aura

$$X = \varphi_1[\theta(au)],$$
$$Y = \varphi_2[\theta(au)]$$

alors $\theta(au)$ sera rationnel en X, Y donc aussi en $x$, $y$, donc aussi en $\theta(u)$ : on est ramené à trouver $\theta(u)$ satisfaisant à la relation

$$\theta(au) = S[\theta(u)]$$

S étant une fonction rationnelle.

2° $p = 1$. Soit, comme dans le cas précédent,

$$x = f(u), \qquad X = f(au) = R_1(x, y),$$
$$y = \varphi(u), \qquad Y = \varphi(au) = R_2(x, y).$$

Il y a une intégrale de première espèce

$$\int \frac{Q(x, y)\,dx}{F'_y}$$

on aura

$$\int_{0,0}^{x,y} \frac{Q(x,y)\,dx}{F'_y} = \int_0^u \frac{Q[f(u), \varphi(u)]\, f'(u)du}{F'_y[f(u)\varphi(u)]} = G(u),$$

la fonction $G(u)$ étant entière.

D'ailleurs

$$G(au) = \int_{0,0}^{X,Y} \frac{Q(X,Y)\,dX}{F'_Y} = k\int_{0,0}^{x,y} \frac{Q(x,y)\,dx}{F'_y},$$

$k$ étant une constante puisque ce sont deux intégrales abéliennes attachées à la courbe de genre 1 considérée. On a donc en définitive

$$G(au) = k\,G(u),$$

ce qui entraîne

$$G(u) = A\,u \qquad (\text{avec } k = a).$$

Il en résulte que $x$ et $y$ *sont des fonctions doublement périodiques de* $A\,u$, *c'est-à-dire de* $u$.

$\omega$ et $\omega'$ étant les deux périodes de l'intégrale abélienne, on a

$$k\omega' = m\,\omega + n\omega'$$
$$k\omega = m_1\,\omega + n_1\omega'.$$

La constante $a$ sera ici nécessairement un entier, sauf dans le cas de la multiplication complexe (au sens de la théorie des fonctions elliptiques).

Passons maintenant au cas d'une surface algébrique. Nous supposons que, pour une surface,

$$F(x, y, z) = 0,$$

il y ait une transformation rationnelle en elle-même

$$x' = R_1(x, y, z),$$
$$y' = R_2(x, y, z),$$
$$z' = R_3(x, y, z),$$

susceptible dans le voisinage de l'origine, point simple de la surface, de se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} x' &= ax + Q_1(x,y) \\ y' &= by + Q_2(x,y) \end{aligned} \qquad |a| > 1,\ |b| > 1$$

$Q_1$ et $Q_2$ commençant par des formes au moins de second degré. On pourra alors exprimer les coordonnées $x, y, z$ d'un point quelconque de la surface par les formules

$$x = f(u,v), \quad y = \varphi(u,v), \quad z = \psi(u,v),$$

$f$, $\varphi$ et $\psi$ étant méromorphes en $u$ et $v$ et satisfaisant aux conditions

$$f(au, bv) = R_1[f(u, v), \varphi(u, v), \psi(u, v)],$$
$$\varphi(au, bv) = R_2[f(u, v), \varphi(u, v), \psi(u, v)],$$
$$\psi(au, bv) = R_3[f(u, v), \varphi(u, v), \psi(u, v)].$$

*Quelle est l'étendue de la classe des surfaces que nous venons d'envisager.* C'est une question à laquelle je ne puis répondre. La surface admettra manifestement une infinite de transformations rationnelles en elles-mêmes, que l'on obtient en prenant les puissances de la transformation initiale. Quand il s'agissait d'une courbe, nous pouvions conclure qu'elle était du genre *zéro* ou *un*, mais on connait peu de choses sur une surface admettant une infinité *discontinue* de transformations rationnelles. On sait seulement, comme l'a montré le premier M. Humbert ([1]), qu'il existe des surfaces admettant une infinité *discontinue* de transformations rationnelles sans admettre une infinité *continue*. M. Painlevé a donné un second exemple extrêmement simple ([2]). Je me borne à énoncer son résultat. Soit $P(z)$ la fonction elliptique classique de Weierstrass. La surface donnée par

$$X = P(U), \qquad Y = P(V), \qquad Z = \frac{P'(U)}{P'(V)}$$

fournit un exemple du fait indiqué. On trouvera la démonstration dans ma *Théorie des fonctions algébriques de deux variables* (t. II, p. 462).

Les surfaces *hyperelliptiques* rentrent évidemment dans le type des surfaces sur lesquelles nous venons de faire quelques remarques, sans parler bien entendu des surfaces unicursales. Pour les surfaces hyperelliptiques *générales*, la multiplication par un nombre entier $p$ des arguments conduira au cas de

$$a = b = p.$$

Il serait intéressant de rechercher s'il y a d'autres surfaces que les précédentes (avec leurs dégénérescences) rentrant dans la classe, sur laquelle certaines équations fonctionnelles appellent ainsi l'attention.

6. On a pu voir que la théorie développée dans les quatre premiers paragraphes est en relation étroite avec le problème de l'itération. On peut l'utiliser pour l'étude de ce problème. C'est par là que nous terminerons ce Chapitre.

---

([1]) HUMBERT, *Comptes rendus*, 30 janvier 1897.
([2]) P. PAINLEVÉ, *Comptes rendus*, 14 février 1897.

Soit

$$z' = R(z)$$

une substitution rationnelle et soient

$$z_1 = R(z), \qquad z_2 = R(z_1), \qquad \ldots, \qquad z_n = R(z_{n-1}), \quad \ldots$$

les *itérés* successifs de cette substitution.

On peut déterminer une fonction uniforme $f(t)$ satisfaisant à la relation

$$f(at) = R[f(t)].$$

Si l'on pose alors

$$z = f(t),$$

on aura évidemment

$$z_n = f(a^n t).$$

Si l'on procédait en sens inverse en posant

$$z_{-(n-1)} = R(z_{-n}),$$

ce qui détermine pour $z_{-n}$ une ou plusieurs valeurs, on verrait que la quantité

$$f\left(\frac{t}{a_n}\right)$$

sera l'une des déterminations de $z_{-n}$.

Ces remarques pourront servir, dans certains cas simples, à déterminer la limite vers laquelle tendent les itérés successifs lorsque $n$ augmente indéfiniment.

En voici deux exemples :

Prenons d'abord

$$z = f(t) = \operatorname{tang} t,$$

on sait que $\operatorname{tang} pt$ est fonction rationnelle de $\operatorname{tang} t$, lorsque $p$ est un entier positif

$$\operatorname{tang} pt = R(\operatorname{tang} t).$$

Les itérés successifs de R seront ici

$$z_1 = \operatorname{tang} pt, \qquad \ldots, \qquad z_n = \operatorname{tang} p^n t.$$

Posons

$$t = u + iv,$$

alors

$$z = x + iy = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2it} - 1}{e^{+2it} + 1},$$

$z$ et $t$ étant réels en même temps; d'ailleurs, pour

$$u = o, \qquad v = 1,$$

on a

$$x = o, \qquad y = \frac{1 - e^{-2}}{1 + e^{-2}} > o.$$

Il résulte de ces deux remarques que les demi-plans $v > o$ et $y > o$ se correspondent ainsi que $v < o$ et $y < o$.

Nous avons

$$z_n = \frac{1}{i} \frac{e^{2p^n ui} e^{-2p^n v} - 1}{e^{2p^n ui} e^{-2p^n v} - 1}.$$

Si l'on suppose $y > o$ c'est-à-dire $v > o$, cette quantité tend vers $-\frac{1}{i} = i$ pour $n = \infty$.

Si au contraire $y < o$, $v < o$, $z_n$ tend vers $-i$. Les itérés de $z$ se *précipitent* donc vers $i$ ou vers $-i$ suivant que $z$ est au-dessus ou au-dessous de l'axe réel.

Le cas où $z$ est sur l'axe réel est plus compliqué. Il y a une étude arithmétique assez pénible à faire. Il ne serait pas difficile de rechercher la limite de $\operatorname{tang} nt$ lorsque $n$ augmente indéfiniment : si $t$ est commensurable avec $\pi$, $\operatorname{tang} nt$ prend un nombre limité de valeurs; si $t$ est incommensurable avec $\pi$, $\operatorname{tang} nt$ ou, si l'on veut, $\operatorname{tang}(nt - \pi k)$ pourra s'approcher autant qu'on le voudra d'un nombre quelconque. Ce problème est beaucoup plus compliqué pour $\operatorname{tang} p^n t$. Nous ne l'aborderons pas ici.

Prenons enfin l'exemple suivant :

$$z = \cos t = x + iy \qquad (\text{avec } t = u + iv).$$

$\cos pt$ est rationnel en $\cos t$

$$\cos pt = R(\cos t).$$

On a cette fois

$$z_n = \cos p^n t = x_n + i y_n,$$

et l'on peut voir aisément que

$$\begin{aligned} x &= \cos u \operatorname{ch} v, \\ y &= -\sin u \operatorname{sh} v; \\ x_n &= \cos p^n u \operatorname{ch} p^n v, \\ y_n &= -\sin p^n u \operatorname{sh} p^n v. \end{aligned}$$

Si $v \neq o$ c'est-à-dire si $z$ n'est pas une quantité réelle comprise entre $-1$ et $+1$, $x_n$ et $y_n$ tendent vers l'infini; les itérés successifs s'éloignent au delà de toute limite.

Si $v=0$ c'est-à-dire $y=0$ et $-1<x<+1$, on tombe sur des difficultés du même ordre que celles rencontrées pour le premier exemple; l'ensemble des points limites des itérés successifs est un ensemble dense de points sur le segment $(-1, +1)$.

# CHAPITRE III.

## ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES. FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES DE PREMIÈRE ET DE SECONDE ESPÈCE. TRANSCENDANTES DE M. PICARD.

### I. — L'ÉQUATION $F(x+1) - F(x) = f(x)$.

On appelle *différence finie d'une fonction* $F(x)$ et l'on désigne par la notation $\Delta_\omega F(x)$, l'expression

$$\Delta_\omega F(x) = \frac{F(x+\omega) - F(x)}{\omega},$$

où $\omega$ est une constante non nulle. Cette expression tend vers la dérivée de $F(x)$ (quand elle existe) si on fait tendre $\omega$ vers zéro. Par analogie avec ce qui se passe pour la dérivée on appelle *intégrale finie* d'une fonction $f(x)$ une fonction $F(x)$ satisfaisant à *l'équation aux différences finies*

$$\Delta_\omega F(x) = f(x).$$

Par un changement de variables immédiat on ramènera la résolution de cette équation à celle de l'équation *canonique*

$$F(x+1) - F(x) = f(x) \tag{1}$$

que nous allons étudier.

Remarquons que si $F_1$ et $F_2$ sont deux solutions distinctes de cette équation, on a

$$[F_1(x+1) - F_2(x+1)] - [F_1(x) - F_2(x)] = 0,$$

ce qui prouve que $F_1 - F_2$ est une fonction de période 1; inversement si à une solution de (1) on ajoute une telle fonction, on obtient une autre solution. La solution générale de (1) est donc de la forme

$$F(x) = F_1(x) + P(x),$$

où $F_1$ est une solution particulière et P une fonction absolument quelconque admettant la période 1.

Remarquons encore que si $F_1$ est une intégrale finie de $f_1$, $F_2$ une intégrale finie de $f_2$, on pourra prendre $F_1 + F_2$ comme intégrale finie de $f_1 + f_2$; la démonstration est évidente.

1. Le cas où $f(x)$ est un polynome est aisé à étudier, il suffira d'après la remarque précédente de chercher l'intégrale finie, que nous désignerons par $S_n(x)$, de la fonction $f(x) = x^n$. On trouve facilement par l'emploi de coefficients indéterminés un *polynome de degré* $n+1$ satisfaisant à l'équation

$$S_n(x+1) - S_n(x) = x^n.$$

Ce polynome est déterminé à une constante additive près, que nous choisirons nulle pour qu'il soit entièrement déterminé. Les polynomes ainsi obtenus sont les *polynomes de Bernoulli*. Ils figurent de façon très simple dans le développement, ordonné suivant les puissances de $z$, de l'expression

$$\varphi(x, z) = \frac{e^{zx}-1}{e^z-1}.$$

Soit en effet

$$\frac{e^{zx}-1}{e^z-1} = \Sigma_0(x) + \frac{z}{1}\Sigma_1(x) + \ldots + \frac{z^n}{n!}\Sigma_n(x) + \ldots$$

ce développement, on a

$$\begin{aligned}\varphi(x+1, z) &= \frac{e^{z(x+1)}-1}{e^z-1} = e^{zx} + \frac{e^{zx}-1}{e^z-1} \\ &= 1 + \Sigma_0(x) + \frac{z}{1}[x + \Sigma_1(x)] + \ldots + \frac{z^n}{n!}[x^n + \Sigma_n(x)] + \ldots,\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\Sigma_n(x+1) - \Sigma_n(x) = x^n.$$

D'ailleurs, si l'on écrit

$$\begin{aligned}\frac{e^{zx}-1}{e^z-1} &= (e^{zx}-1)\left[\frac{1}{z}\,\frac{z}{e^z-1}\right] \\ &= \left[zx + \frac{z^2x^2}{2!} + \ldots + \frac{z^nx^n}{n!} + \ldots\right][1 + B_1 z + \ldots + B_n z^n + \ldots]\frac{1}{z},\end{aligned}$$

on voit que le coefficient $\Sigma_n$ obtenu en effectuant le produit ci-dessus est un polynome en $x$, de degré $n+1$ et sans terme constant; c'est donc le polynome $S_n(x)$ lui-même.

Supposons que la fonction $f(x)$ dont on cherche l'intégrale finie soit une fonction entière

$$(2) \qquad G(x) = \sum^{\infty} a_n x^n.$$

La série

$$\sum_0^\infty a_n \mathrm{S}_n(x) \tag{3}$$

satisfait formellement à l'équation; malheureusement la convergence de la série (2) dans tout le plan n'entraîne que rarement celle de la série (3) et ce procédé est impraticable dans la majorité des cas.

M. C. Guichard [1], le premier, a donné une solution : nous en dirons plus loin quelques mots. M. P. Appell [2] reprit la question en vue d'une application aux fonctions quadruplement périodiques de deux variables. Il détermine au moyen de la méthode de M. Guichard des fonctions entières $\mathrm{U}_n$ satisfaisant aux équations

$$\mathrm{U}_n(x+1) - \mathrm{U}_n(x) = x^n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

et telles que la série $\Sigma a_n \mathrm{U}_n(x)$ soit toujours convergente lorsque la série $\Sigma a_n x^n$ l'est. M. Appell donne en outre une extension au cas de deux variables. D'autres géomètres ont, depuis, étudié la question [3]. M. Hurwitz [4] donne une méthode basée sur le même principe que celle de M. Appell; la manière dont on détermine les fonctions U est seule différente. C'est cette dernière méthode que nous allons maintenant exposer.

2. C'est par une intégrale de Cauchy que M. Hurwitz obtient les fonctions $\mathrm{U}_n$. Remarquons pour commencer que l'on a (d'après le développement en série étudié plus haut)

$$\mathrm{S}_n(x) = \frac{n!}{2\pi i}\int \frac{e^{zx}-1}{e^z-1}\,\frac{1}{z^{n+1}}\,dz,$$

cette intégrale étant étendue à un contour *comprenant à son intérieur le point* $z=0$, *mais ne renfermant aucun autre pôle de la fonction qui figure sous le signe somme*. Or cette fonction admet d'autres pôles

(1) C. Guichard, *Sur la résolution de l'équation aux différences finies*

$$\mathrm{G}(x+1) - \mathrm{G}(x) = \mathrm{H}(x)$$

(*Ann. de l'École Norm.*, 1887).

(2) P. Appell, *Sur les fonctions périodiques de deux variables* (*Journal de Liouville*, 1891).

(3) M. Nörlund a donné un historique complet de la question (*Bulletin des Sciences math.*, 1920, p. 174 et suiv.).

(4) Hurwitz, *Sur l'intégrale finie d'une fonction entière* (*Acta Mathematica*, t. 20, 1897).

qui sont les points

$$z = 2k\pi i \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots),$$

zéros du dénominateur $e^z - 1$.

L'idée de M. Hurwitz est d'étudier la même intégrale, *mais le long d'un contour enveloppant cette fois les* $2n+1$ *points*

$$z = 0,$$
$$z = \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \ldots, \pm 2n\pi i.$$

L'intégrale sera alors la somme des résidus correspondant à chacun de ces pôles.

Au point $a$ le résidu est (à un facteur constant près)

$$\frac{e^{ax}-1}{e^a}\,\frac{1}{a^{n+1}},$$

ce qui donne pour résidu au point $2k\pi i$ la *fonction — de période* 1 —

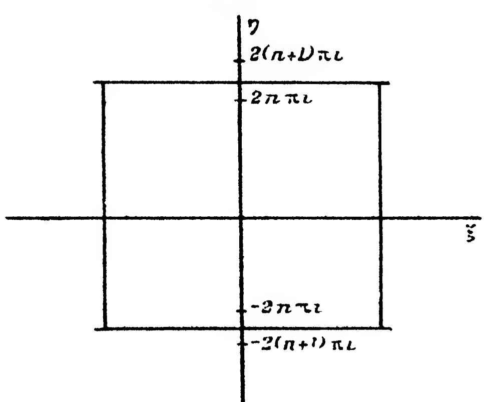
$$\frac{e^{2k\pi i x}-1}{(2k\pi i)^{n+1}}.$$

L'intégrale aura alors pour valeur

$$S_n(x) + n! \sum_{k=-n}^{k=+n} \frac{e^{2k\pi i x}-1}{(2k\pi i)^{n+1}},$$

fonction qui est une intégrale finie de $x^n$ et que nous prendrons comme

Fig 49




fonction $U_n$. Il est d'ailleurs évident que c'est là une fonction entière.

Il reste à prouver que si la série $\Sigma a_n x^n$ converge dans tout le plan il en est de même de la série $\Sigma a_n U_n$.

Pour faire cette démonstration, nous prendrons comme contour particulier $C_n$ un carré dont les côtés ont pour équations

$$\xi = \pm(2n+1)\pi,$$
$$\eta = \pm(2n+1)\pi,$$

dans le plan de la variable complexe

$$z = \xi + i\eta.$$

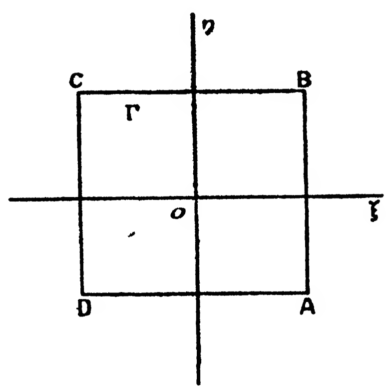
Ce contour dépend évidemment de $n$ ce qui est gênant. Il suffira de poser

$$z' = \frac{z}{(2n+1)\pi},$$

pour le ramener, dans le plan de la variable $z'$, au carré fixe $\Gamma$ dont les côtés sont

$$\xi' = \pm 1,$$
$$\eta' = \pm 1.$$

Fig. 50.




L'intégrale devient par ce changement de variables

$$U_n = \frac{n!}{(2n+1)^n \pi^n} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{(2n+1)\pi x z'} - 1}{e^{(2n+1)\pi z'} - 1} \frac{1}{z'^{n+1}} dz'.$$

Nous nous proposons de chercher une limite supérieure du module de $U_n$, si l'on suppose que $x$ reste dans une région R *finie mais arbitrairement grande*.

On aura évidemment, $z'$ restant sur $\Gamma$ et $x$ dans R,

$$|e^{z'\pi x}| < \rho.$$

il en résulte

$$|e^{(2n+1)z\pi c}-1|<\rho^{2n+1}+1,$$

ce qu'on peut écrire

$$|e^{(2n+1)z\pi c}-1|<2\rho^{2n+1},$$

en se plaçant dans le cas le plus défavorable où $\rho>1$. D'autre part on a sur le côté AB

$$z'=1+\iota\eta',$$

d'où

$$|e^{(2n+1)\pi z'}-1|=|e^{(2n+1)\pi(1+\iota\eta')}-1|>|e^{(2n+1)\pi(1+\iota\eta')}|-1=e^{(2n+1)\pi}-1.$$

On a de même sur BC

$$z'=\xi'+\iota,$$

$$e^{(2n+1)\pi z}=-e^{(2n+1)\pi\xi}$$

comme $\xi$ varie de $+1$ à $-1$, on voit que

$$|e^{(2n+1)\pi z}-1|>e^{-2(n+1)\pi}+1.$$

Des raisonnements analogues donnent sur CD

$$|e^{(2n+1)\pi z'}-1|>1-e^{-(2n+1)\pi}$$

et sur DA

$$|e^{(2n+1)\pi z'}-1|>e^{-(2n+1)\pi}+1.$$

Quel que soit $n>0$, on voit aisément que la plus petite de ces quatre limitations est

$$1-e^{-(2n+1)\pi},$$

qui est elle-même supérieure à $1-e^{-\pi}$, c'est-à-dire encore à $\frac{1}{2}$. On a donc sur tout le carré $\Gamma$

$$|e^{(2n+1)\pi z}-1|>\frac{1}{2}.$$

On a d'ailleurs sur tout le carré

$$|z'|\geqq 1,$$

il vient donc

$$|U_n|<\frac{n!}{2\pi(2n+1)^n\pi^n}\,\frac{2\rho^{2n+1}}{\frac{1}{2}}8=\frac{16\,n!}{\pi^{n+1}}\,\frac{\rho^{2n+1}}{(2n+1)^n}.$$

Pour étudier la convergence de $\Sigma a_n U_n$, prenons

$$\sqrt[n]{a_n U_n}=\sqrt[n]{a_n}\,\sqrt[n]{U_n}.$$

La série $\Sigma a_n x^n$ étant entière, $\sqrt[n]{a_n}$ tend vers O lorsque $n$ augmente indéfiniment.

On a

$$\sqrt[n]{U_n} < 16^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt[n]{n!}}{\pi^{1+\frac{1}{n}}} \frac{2^{2+\frac{1}{n}}}{2n+1}.$$

L'expression

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{2n+1} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \frac{n}{2n+1}$$

a pour limite $\frac{1}{2e}$; $\sqrt[n]{U_n}$ a donc une limite inférieure à

$$\frac{2^2}{2e\pi},$$

et, quel que soit $x$ dans R, $\sqrt[n]{a_n U_n}$ a pour limite O et la série est convergente. Cette série qui converge dans toute région finie du plan, représente une *fonction entière* de $x$; c'est la solution entière cherchée de l'équation

$$F(x+1) - F(x) = G(x).$$

3. Prenons maintenant comme second membre $f(x)$, une fonction $\Phi(x)$ *méromorphe dans tout le plan*. Nous allons voir que l'on peut *déterminer une intégrale finie de* $\Phi(x)$, *méromorphe elle-même dans tout le plan*.

On pourra toujours écrire

$$\Phi(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x),$$

$\Phi_1$ n'ayant de pôles qu'à droite de l'axe $O\eta$ et $\Phi_2$ n'en ayant qu'à gauche du même axe. D'après la remarque faite au début, il suffira de chercher l'intégrale finie de $\Phi_1$, celle de $\Phi_2$ et de les ajouter. Nous aurons donc à traiter le problème suivant : $\Phi(x)$ *étant méromorphe partout à distance finie et n'ayant (pour fixer les idées) de pôles qu'à gauche de la droite*

$$\xi = 0,$$

*déterminer une intégrale finie* $\Phi(x)$.

Remarquons que, dans ces conditions, la fonction $\Phi(x+n)$ n'aura de pôles *qu'à gauche* de la droite

$$\xi = -n.$$

Elle est alors holomorphe dans tout domaine borné situé *à droite* de $\xi = -n$; et alors $\varepsilon_n$ et $\delta$ étant deux nombres arbitrairement petits, on peut déterminer un polynome $g_n(x)$ tel que

$$|g_n(x) - \Phi(x+n)| < \varepsilon_n,$$

dans toute région bornée du demi-plan ne *s'étendant pas, à gauche, au delà de la droite*

$$\xi = n + \delta.$$

Soit alors la série

$$H(x) = -\Phi(x) + [g_1(x) - \Phi(x+1)] + \ldots + [g_n(x) - \Phi(x+n)] + \ldots$$

et supposons que la série $\Sigma\varepsilon_n$ ait été choisie convergente. Soit R une région *bornée* du plan ne s'étendant pas à gauche au delà de la droite

$$\xi = -N + \delta;$$

on aura dans cette région

$$|g_n(x) - \Phi(x+n)| < \varepsilon_n,$$

pourvu que

$$n > N;$$

autrement dit : à partir du $N^{\text{ième}}$ terme *la série* $H(x)$ *converge uniformément*; quant à la somme des $N-1$ premiers termes, c'est une fonction méromorphe. La région R pouvant d'ailleurs être prise arbitrairement grande pourvu qu'elle reste bornée, on voit que la série $H(x)$ représente une fonction méromorphe dans tout le plan.

On a d'ailleurs

$$H(x+1) - H(x) = \Phi(x) - g_1(x) + [g_1(x+1) - g_2(x)] + \ldots,$$
$$H(x+1) - H(x) = \Phi(x) + G(x),$$

$G(x)$ désignant une série de polynomes convergente dans tout le plan, c'est-à-dire une fonction entière.

Si l'on désigne alors par $P(x)$ une solution entière de l'équation

$$P(x+1) - P(x) = G(x),$$

on voit que la *fonction méromorphe* $H(x) - P(x)$ est solution de l'équation proposée

$$F(x+1) - F(x) = \Phi(x).$$

Le cas où $\Phi(x)$ a tous ses pôles à droite de l'axe des N, se traite de façon analogue. On peut d'ailleurs, si l'on veut se ramener au cas précédent, écrire l'équation ci-dessus

$$F(-x+1) - F(-x) = \Phi(-x)$$

et poser

$$F(-x+1) = -F_1(x).$$

On a alors

$$F(-x) = -F_1(x+1)$$

et l'équation devient

$$F_1(x+1) - F_1(x) = \Phi(-x),$$

$\Phi(-x)$ ayant ses pôles à gauche de $O\eta$.

*Remarque.* — Si $\Phi(x)$ est la dérivée logarithmique d'une fonction méromorphe $\Psi(x)$, elle a seulement des *pôles simples de résidus entiers*. D'après la loi même de sa formation, $H(x)$ jouira de la même propriété ainsi que $F(x) = H(x) - P(x)$.

La fonction

$$K(x) = e^{\int_a^x F(t)\,dt}$$

est alors une fonction méromorphe et l'on a

$$K'(x) = K(x)F(x),$$

ce qui prouve que $F(x)$ peut elle-même *être considérée comme la dérivée logarithmique de la fonction méromorphe* $K(x)$.

Remplaçons $F(x)$ par $\frac{K'(x)}{K(x)}$ et $\Phi(x)$ par $\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)}$ dans l'équation proposée; il viendra

$$\frac{K'(x+1)}{K(x+1)} - \frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)},$$

c'est-à-dire

$$K(x+1) = C\,K(x)\,\Psi(x).$$

Posons

$$K(x) = L(x)\,e^{x\,\mathrm{Log}\,C}.$$

La fonction méromorphe $L(x)$ est alors solution de l'équation fonctionnelle

$$\frac{L(x+1)}{L(x)} = \Psi(x),$$

qui se trouve ainsi résolue.

4. Nous terminerons cette étude de l'équation

$$F(x+1) - F(x) = f(x)$$

par un aperçu de la méthode employée par M. Guichard [dans le cas où $f(x)$ est une fonction entière]. En réalité nous examinerons seulement le cas, plus simple à résoudre, où $f(x)$ est seulement supposée *holomorphe dans une bande limitée par les droites*

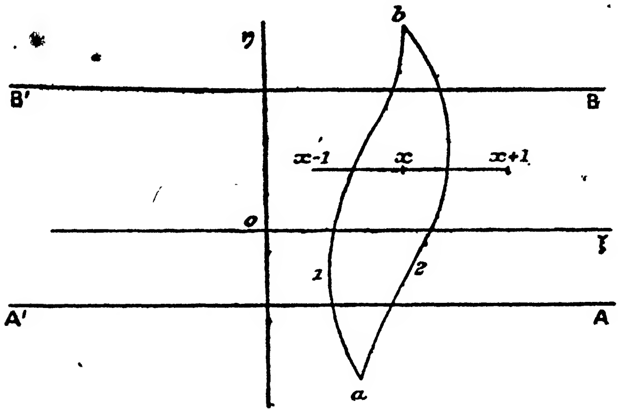
$$AA' \mid \eta = A, \qquad BB' \mid \eta = B \qquad (A < B).$$

Nous chercherons une solution qui soit *holomorphe dans la même bande.*

Soient

$$a = \alpha + i\alpha' \qquad (\alpha' < A),$$
$$b = \beta + i\beta' \qquad (\beta' > B),$$

Fig. 51.




deux points du plan et considérons l'intégrale

$$(1) \qquad F(x) = \int_a^b \frac{f(z)}{1 - e^{2\pi i(x-z)}}\,dz,$$

prise le long d'un chemin joignant $a$ à $b$ et évitant les pôles

$$z = x \pm k.$$

Cette intégrale est une fonction holomorphe de $x$ dans toute la bande considérée, mais elle n'est pas uniforme puisqu'elle prend des valeurs différentes si l'on intègre le long de deux chemins comprenant entre eux un certain nombre des pôles plus haut désignés. Nous la rendrons uniforme en assujettissant le chemin d'intégration *à passer entre le point $x$ et le point $x - 1$*. C'est le chemin désigné sur la figure par $a\,1$ de taille normale $b$.

Que sera dans ces conditions $F(x+1)$? L'élément différentiel ne change pas puisque

$$e^{2\pi i(x-z)+2\pi i} = e^{2\pi i(x-z)}.$$

La seule chose qui change est le chemin d'intégration $a2b$ qui doit passer cette fois entre $x+1$ et $x$. On a donc

$$F(x+1) - F(x) = \int_{a2b} \frac{f(z)}{1 - e^{2\pi i(x-z)}}\,dz - \int_{a1b} \frac{f(z)}{1 - e^{2\pi i(x-z)}}\,dz,$$

$F(x+1)-F(x)$ n'est donc pas autre chose que le résidu de l'intégrale considérée autour du point $x$, c'est-à-dire

$$2\pi i \frac{f(x)}{2\pi i} = f(x).$$

$F(x)$ est donc une solution holomorphe dans la bande (AA', BB'), de l'équation proposée. La méthode est, comme on le voit, très simple mais des difficultés se présentent lorsqu'on veut l'appliquer à tout le plan, $a$ et $b$ étant alors rejetés à l'infini. Nous laisserons de côté les difficultés du passage à la limite et nous contenterons de faire quelques remarques dans le cas où l'on pourrait supposer qu'il a été réalisé, la fonction $\varphi(x)$ s'étant comportée convenablement à l'infini.

Nous utiliserons l'intégrale de M. Guichard pour établir une formule sommatoire que nous appliquerons ensuite à un cas simple.

5. Le problème que nous avons en vue est l'évaluation de la somme

$$\sum_{\nu=0}^{n} G(\nu),$$

$G(x)$ étant une fonction entière.

En faisant successivement $x = 0, 1, \ldots, n$ dans la relation

$$F(x+1) - F(x) = G(x),$$

on obtient

$$\sum_{\nu=0}^{n} G(\nu) = F(n+1) - F(0).$$

Nous prendrons comme chemin d'intégration pour évaluer $F(x)$ une courbe C pouvant se ramener à la droite parallèle à $O\eta$ menée par $x$ et évitant le point $x$ par un petit arc de cercle *à gauche* de cette droite. (Ceci suppose bien entendu que l'on a pu prendre $a$ et $b$ à l'infini dans la direction $O\eta$.) Si l'on pose

$$z = x + it,$$

le chemin se ramène dans le plan de la variable $t$ à l'axe réel, en évitant le point O par un petit arc de cercle situé *au-dessus* de l'axe réel. Soit $\Gamma$ ce nouveau chemin. On a

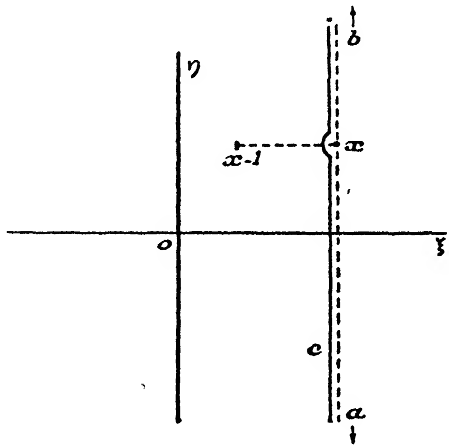
$$F(x) = \int_C \frac{G(z)}{1-e^{2\pi i(x-z)}}\,dz = i\int_\Gamma \frac{e^{-\pi t}\,G(x+it)}{e^{-\pi t}-e^{\pi t}}\,dt.$$

Pour avoir $F(x+1)$, on posera

$$x - z = it,$$

le chemin d'intégration C′ qu'il aurait fallu suivre se ramène encore à Γ

Fig. 52.




dans le plan des $t$ et l'on a

$$F(x+1) = -i\int_\Gamma \frac{e^{\pi t}\,G(x-it)}{e^{-\pi t}-e^{\pi t}}\,dt.$$

Or, on a

$$2F(x) = F(x) + F(x+1) - G(x),$$

$$(5)\qquad F(x) = -\frac{1}{2}G(x) + \frac{i}{2}\int_\Gamma \frac{e^{-\pi t}\,G(x+it) - e^{\pi t}\,G(x-it)}{e^{-\pi t}-e^{\pi t}}\,dt.$$

L'intégrale que l'on obtient ici n'a plus de point singulier pour $t = 0$. On pourra donc ne plus éviter le point O et prendre simplement l'intégrale de $-\infty$ à $+\infty$ *le long de l'axe réel*. En faisant dans la relation (5) $x = 0$ et $x = n$, on obtient en définitive

$$(6)\qquad \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} G(\nu) = -\frac{1}{2}[G(n)-G(0)] + \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\pi t}[G(n+it)-G(it)] - e^{\pi t}[G(n-it)-G(-it)]}{e^{-\pi t}-e^{\pi t}}\,dt.$$

C'est la formule sommatoire ([1]) cherchée.

---

([1]) On trouvera dans le Livre de M. Ernst Lindelöf (*Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions*) un historique assez complet sur les formules sommatoires et des renseignements intéressants sur ce sujet qui, à une certaine époque, occupa beaucoup les mathématiciens.

Appliquons ceci au cas de

$$G(x) = e^{-\frac{\pi i}{n}x^2} \qquad (n \text{ étant un entier pair}).$$

On a

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} e^{-\frac{\pi i}{n}\nu^2} = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\pi t}\left[e^{-\frac{\pi i}{n}(n+it)^2} - e^{\frac{\pi i t^2}{n}}\right] - e^{\pi t}\left[e^{-\frac{\pi i}{n}(\pi - it)^2} - e^{\frac{\pi i t^2}{n}}\right]}{e^{-\pi t} - e^{+\pi t}}\,dt,$$

ce qui donne, toutes réductions faites,

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} e^{-\frac{\pi i}{n}\nu^2} = -i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i t^2}{n}}\,dt,$$

et, en posant

$$t = \theta\sqrt{n},$$

(7)
$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} e^{-\frac{\pi i}{n}\nu^2} = -i\sqrt{n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i\theta^2}\,d\theta.$$

Cette intégrale est du type de celles rencontrées par Fresnel dans la théorie de la diffraction, mais la formule (7) nous permet de la calculer; faisant en effet $n = 2$, nous aurons

$$1 + e^{-\frac{\pi i}{2}} = -i\sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i t^2}\,dt,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i t^2}\,dt = i\,\frac{\left(1 + e^{\frac{\pi i}{2}}\right)}{\sqrt{2}} = \frac{i - 1}{\sqrt{2}}.$$

On en conclut

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} e^{\frac{\pi i\nu^2}{n}} = \frac{1-i}{2}\sqrt{2n}$$

et aussi

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \cos\frac{\pi\nu^2}{n} = \frac{1}{2}\sqrt{2n},$$

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \sin\frac{\pi\nu^2}{n} = \frac{1}{2}\sqrt{2n}.$$

On appelle ces sommes les *sommes de Gauss;* elles se présentent dans la théorie des fonctions elliptiques.

*Remarque.* — Il convient de ne pas oublier que nous avons au début du calcul, supposé que *n était pair*.

## II. — GÉNÉRALISATIONS DIVERSES DE L'ÉQUATION $F(x+1) - F(x) = f(x)$.

**1.** L'équation *à coefficients méromorphes*

$$\varphi_0(x)\,F(x+1) - \varphi_1(x)\,F(x) = \varphi_2(x) \tag{1}$$

se ramène aux types déjà étudiés :

Écrivons-la

$$F(x+1) - \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)}F(x) = \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_0(x)}, \tag{1'}$$

et posons

$$F(x) = \frac{F_1(x)}{L(x)}.$$

Il vient après réduction

$$F_1(x+1) - \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)}\frac{L(x+1)}{L(x)}F_1(x) = \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_0(x)}L(x+1).$$

Prenons pour $L(x)$ une solution de l'équation

$$\frac{L(x+1)}{L(x)} = \frac{\varphi_0(x)}{\varphi_1(x)},$$

que nous avons appris à résoudre.

$F(x)$ sera alors solution de l'équation

$$F_1(x+1) - F_1(x) = \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_0(x)}L(x+1),$$

qui est d'un type connu.

**2.** On pourrait traiter par cette méthode l'équation

$$F(x+1) - a\,F(x) = G(x),$$

où $a$ désigne une constante différente de 1.

L'équation qui détermine $L(x)$ est alors

$$\frac{L(x+1)}{L(x)} = \frac{1}{a}$$

et admet pour solution

$$L(x) = e^{kx} \qquad (\text{avec } e^{-k} = a);$$

on a ensuite à résoudre

$$F_1(x+1) - F_1(x) = G(x)\, e^{k(x+1)},$$

qui admet une solution entière qu'on sait trouver.

La fonction

$$F(x) = F_1(x)\, e^{-kx}$$

est alors une solution entière de l'équation proposée.

On peut aussi résoudre cette équation directement comme on l'a fait pour $a = 1$. On se servira pour cela de polynomes analogues à ceux de Bernoulli et qui seront donnés par des équations

$$S_n(x+1) - a\, S_n(x) = x^n. \tag{2}$$

Par l'emploi de coefficients indéterminés, on peut montrer qu'il existe un polynome, de degré $n$ cette fois, qui satisfait à l'équation (3). Ce polynome est d'ailleurs sans terme constant et parfaitement déterminé, les autres solutions étant des transcendantes.

Comme pour les polynomes de Bernoulli, il existe une expression dans le développement de laquelle figurent ces polynomes. C'est

$$\varphi(x) = \frac{e^{zx}}{e^z - a} = \Sigma_0(x) + \ldots + \frac{z^n}{n!}\Sigma_n(x) + \ldots.$$

on a en effet

$$\varphi(x+1) = a\,\frac{e^{zx}}{e^z - a} + e^{zx} = a\,\Sigma_0(x) + 1 + \ldots + \frac{z^n}{n!}\left[a\,\Sigma_n(x) + x^n\right],$$

et l'on voit bien que

$$\Sigma_n(x+1) - a\,\Sigma_n(x) = x^n.$$

Le développement de $\varphi(x)$ est d'ailleurs le produit des deux développements

$$\frac{1}{e^z - a} = \frac{1}{1-a} + C_1 z + \ldots + C_n z^n + \ldots,$$

$$e^{zx} = 1 + \frac{zx}{1} + \ldots + \frac{z^n}{n!}x^n + \ldots,$$

et l'on constate en effectuant ce produit que les coefficients $\Sigma_n$ sont bien des polynomes en $x$, du degré $n$ et sans termes constants, et se confondent donc avec les $S_n$.

On a alors

$$S_n(x) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{e^{zx}}{e^z - a}\,\frac{1}{z^{n+1}}\,dz,$$

C ne contenant à son intérieur que le pôle $z = 0$.

Le raisonnement fait plus haut s'applique alors; la seule modification est que le contour $C_n$ doit cette fois entourer les points

$$z=0, \qquad z=\log a+2k\pi i \qquad (k=\pm 1, \ldots, \pm n).$$

**3.** Considérons enfin l'équation

$$a_0 F(x+n)+\ldots+a_n F(x)=G(x), \tag{3}$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des constantes données.

Posons

$$F(x+1)-\lambda F(x) \qquad = F_1(x),$$

il s'ensuit

$$\begin{aligned}
F(x+2)-\lambda F(x+1) &= F_1(x+1),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
F(x+n)-\lambda F(x+n-1) &= F_1(x+n-1).
\end{aligned}$$

Multiplions la première de ces $n$ équations par une constante $b_{n-1}$ à déterminer, la seconde par $b_{n-2}$, la $n^{\text{ième}}$ par $b_0$ et ajoutons; il vient

$$\begin{aligned}
b_0 F_1(x+n-1)+b_1 F_1(x+n-2)+\ldots+b_{n-1} F_1(x)&\\
= b_0 F(x+n)+(b_1-\lambda b_0) F(x+n-1)+\ldots&\\
+(b_{n-1}-\lambda b_{n-2}) F(x+1)-\lambda b_{n-1} F(x);&
\end{aligned} \tag{4}$$

déterminons $\lambda, b_0, \ldots, b_{n-1}$ de façon à retrouver dans le second membre de (3) le premier membre de (4) et par conséquent $G(x)$. Cela aura lieu si

$$\left\{\begin{aligned}
a_0 &= b_0,\\
a_1 &= b_1-\lambda b_0,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
a_{n-1} &= b_{n-1}-\lambda b_{n-2},\\
a_n &= -\lambda b_{n-1}.
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Le déterminant de ce système de $n+1$ équations aux $n$ inconnues, $b_0, \ldots, b_{n-1}$ se réduit, tous calculs faits, à

$$S(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n. \tag{6}$$

Il devra être nul.

Soit $\lambda_1$ une racine de *l'équation caractéristique*

$$S(\lambda)=0;$$

en faisant $\lambda=\lambda_1$ dans le système (5), il a une solution non nulle qui se détermine de proche en proche. On est alors ramené à résoudre l'équation

$$(7) \qquad b_0 F_1(x+n-1) + \ldots + b_{n-1} F_1(x) = G(x),$$

puis, lorsqu'on connaît $F_1$,

$$F(x+1) - \lambda_1 F(x) = F_1(x).$$

L'équation (7) se traitera comme l'équation (4).

La nouvelle équation caractéristique sera

$$\frac{S(\lambda)}{\lambda - \lambda_1} = 0.$$

On a en effet

$$\begin{aligned}
b_0 \qquad\quad &= a_0,\\
b_1 - \lambda_1 b_0 &= a_1,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots\ldots\\
b_{n-1} - \lambda_1 b_{n-2} &= a_{n-1},\\
-\lambda_1 b_{n-1} &= a_n,
\end{aligned}$$

et l'on en tire immédiatement

$$a_0\lambda^n + \ldots + a_n = (\lambda - \lambda_1)(b_0\lambda^{n-1} + \ldots + b_{n-1}).$$

On ramènera donc la résolution de l'équation (7) à celle des deux équations

$$c_{n-2} F_2(x+n-2) + \ldots + c_0 F_2(x) = G(x),$$
$$F_1(x+1) - \lambda_2 F_1(x) = F_2(x),$$

$\lambda_2$ étant une autre racine de $S(\lambda)$.

Au bout de $n-1$ opérations on voit qu'on aura décomposé la résolution de l'équation (4) en la résolution successive des équations

$$\begin{aligned}
F_{n-1}(x+1) - \lambda_n\, F_{n-1}(x) &= G(x),\\
F_{n-2}(x+1) - \lambda_{n-1} F_{n-2}(x) &= F_{n-1}(x),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots\ldots\ldots\\
F_1(x+1) - \lambda_2\, F_1(x) &= F_2(x),\\
F(x+1) - \lambda_1\, F(x) &= F_1(x),
\end{aligned}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ étant les $n$ racines, pas forcément distinctes, de l'équation caractéristique.

## III. — SOLUTIONS PÉRIODIQUES DE L'ÉQUATION $F(z+\omega)-\mu F(z)=P(z)$ LORSQUE $P(z)$ EST PÉRIODIQUE.

Nous nous proposerons maintenant d'étudier l'équation

$$F(z+\omega)-\mu F(z)=P(z), \tag{1}$$

à un point de vue assez différent de celui envisagé jusqu'ici [1].

Dans cette équation $\mu$ et $\omega$ sont des constantes données, $P(z)$ est une fonction admettant la période $\omega' i$. On ne diminue d'ailleurs pas la généralité en supposant $\omega$ et $\omega'$ réels et positifs.

Nous nous proposons de démontrer *l'existence, sous certaines conditions, d'une solution admettant aussi la période* $\omega' i$.

**1.** Pour commencer, nous *supposerons* $P(z)$ *entière*, la solution cherchée devant alors être entière.

Si l'on pose $X=e^{\frac{2\pi z}{\omega'}}$, une fonction entière, de période $\omega' i$ peut se développer en série de Laurent [2]

$$P(z)=\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\left[A_\nu X^\nu+\frac{B_\nu}{X^\nu}\right], \tag{2}$$

dans toute couronne de centre O.

On aura de même pour $F(z)$ supposée entière

$$F(z)=\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\left[A'_\nu X^\nu+\frac{B'_\nu}{X^\nu}\right]. \tag{3}$$

Remarquons que

$$X(z+\omega)=X(z)\,e^{\frac{2\pi\omega}{\omega'}}$$

et posons

$$e^{\frac{2\pi\omega}{\omega'}}=\lambda>1.$$

Il vient

$$F(z+\omega)=\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\left[A'_\nu\lambda^\nu X^\nu+\frac{B'_\nu}{\lambda^\nu X^\nu}\right].$$

---

[1] M. É. Picard a traité d'abord ce problème dans son Mémoire *Sur une classe de transcendantes nouvelles* (*Acta Mathematica*, t. 18, 1894).

[2] *Voir* par exemple le *Traité d'Analyse* de M. É. Picard (t. II, 3ᵉ édition, p. 140).

D'où, en portant dans (1) et identifiant,

$$A'_\nu(\lambda^\nu - \mu) = A_\nu,$$
$$B'_\nu\left(\frac{1}{\lambda^\nu} - \mu\right) = B^\nu.$$

*Si nous supposons alors réalisée la condition*

$$\mu \neq \lambda^p$$

(*quel que soit p, entier positif ou négatif*), nous aurons

$$A'_\nu = \frac{A_\nu}{\lambda^\nu - \mu}, \qquad B'_\nu = \frac{B_\nu}{\frac{1}{\lambda^\nu} - \mu},$$

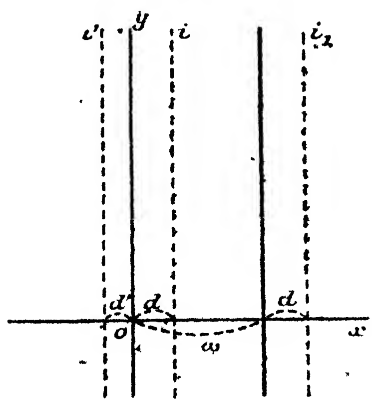
et l'on voit aisément que *la série* (3) *est convergente pourvu que la série* (2) *le soit;* la fonction $F(z)$ définie par ce développement est donc bien une fonction entière; *le problème est résolu.*

2. Supposons maintenant $P(z)$ *méromorphe dans tout le plan* de la variable

$$z = x + iy.$$

Nous admettrons de plus que l'on peut tracer une bande étroite $ii'$ renfermant $Oy$, la fonction étant holomorphe dans $ii'$ (si cela n'était pas,

Fig. 23.




il suffirait de faire une translation convenable parallèlement à $Ox$).

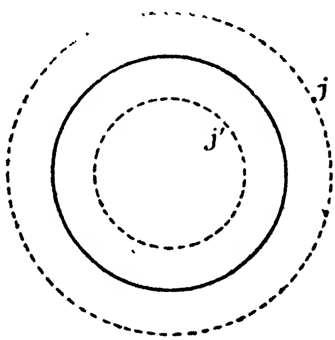
Nous appellerons $d$ et $d'$ les valeurs absolues des abscisses des droites $i$ et $i'$.

Nous montrerons que *l'on peut déterminer une solution* $F(z)$ *holo-*

*morphe, non plus seulement dans $ii'$, mais encore dans toute la bande $i_1 i'$* (la signification est évidente sur la figure). Une fois cela démontré, nous pourrons prolonger $F(z)$ dans tout le plan en nous servant de l'équation (1) elle-même suivant une méthode qui nous est déjà familière. Ce prolongement *n'introduira d'ailleurs d'autres singularités que des pôles*, $P(z)$ étant méromorphe.

Les calculs sont exactement les mêmes que ceux faits plus haut, mais ici le développement (2) n'est valable que dans la bande $ii'$ à laquelle correspond dans le plan des X, une couronne $jj'$ enfermant le cercle de

Fig. 54.




rayon 1 qui correspond à $Oy$. On a en effet pour les rayons $\rho$ et $\rho'$ de $j$ et $j'$

$$\rho = e^{\frac{2\pi d}{\omega'}} > 1,$$

$$\rho' = e^{-\frac{2\pi d'}{\omega'}} < 1.$$

Nous avons vu que la série de Laurent

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \left[ \frac{A_\nu X^\nu}{\lambda^\nu - \mu} + \frac{B_\nu}{\left(\frac{1}{\lambda^\nu} - \mu\right) X^\nu} \right]$$

satisfait formellement à l'équation (1).

Posons

$$\theta = \frac{1}{\lambda} < 1,$$

ce développement devient

$$(4') \qquad F(z) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \left[ \frac{A_\nu \theta^\nu}{1 - \mu\theta^\nu} X^\nu + \frac{B_\nu}{\theta^\nu - \mu} \frac{1}{X^\nu} \right].$$

Comme nous l'avons dit plus haut ce développement est convergent en même temps que le développement (2) c'est-à-dire dans toute la couronne $jj'$. Désignons par M le maximum de $|P(z)|$ dans la couronne et sur son contour. On a

$$|A_\nu| < \frac{M}{\rho^\nu}, \qquad |B_\nu| < M\rho'^\nu.$$

La série

$$\sum \frac{A_\nu \theta^\nu}{1-\mu\theta^\nu} X^\nu$$

est convergente comme la série

$$\Sigma A_\nu \theta^\nu X^\nu$$

puisque l'on a

$$\theta < 1.$$

Cette dernière série est majorée par

$$\sum \frac{M}{\rho^\nu} \theta^\nu |X^\nu|,$$

qui est convergente pourvu que

$$|X| < \frac{\rho}{\theta} = e^{\frac{2\pi d}{\omega'} + \frac{2\pi\omega}{\omega'}} = e^{\frac{2\pi}{\omega'}(d+\omega)}$$

ce qui revient, dans le plan des $z$, à

$$x < d + \omega.$$

Pour la seconde série

$$\sum \frac{B_\nu}{\theta^\nu - \mu} \frac{1}{X^\nu},$$

elle converge, nous l'avons dit, en même temps que

$$\sum \frac{B_\nu}{X^\nu},$$

c'est-à-dire pour

$$x > -d'.$$

La convergence du développement de $F(z)$ a donc bien lieu dans la bande $i_1 i'$ indiquée et, en prolongeant $F(z)$ comme il a été dit, nous obtenons une solution périodique et de période $\omega' i$, *méromorphe dans tout le plan, de l'équation*

$$F(z+\omega) - \mu F(z) = P(z),$$

toujours sous la condition

$$\mu \neq \lambda^p$$

ou

$$\mu \neq e^{\frac{2p\pi\omega}{\omega'}},$$

quel que soit $p$.

On peut aller plus loin et montrer que, pour

$$-d' \leqq x \leqq \omega,$$

on a

$$F(z) < aM,$$

$a$ ne dépendant pas de M mais seulement de $\omega$, $\omega'$, $\mu$, $d$, $d'$.

Nous avions

$$F(z) = \sum_0^\infty \frac{\theta^\nu}{1-\mu\theta^\nu} A_\nu X^\nu + \sum_0^\infty \frac{1}{\theta^\nu - \mu} \frac{B_\nu}{X^\nu};$$

pour $x = \omega$, on a

$$|X| = e^{\frac{2\pi\omega}{\omega'}} = \frac{1}{\theta}$$

et

$$|F(z)| < \sum_0^\infty \frac{A_\nu}{1-\mu\theta^\nu} + \sum_0^\infty \frac{\theta^\nu}{\theta^\nu - \mu} B_\nu,$$

$$|F(z)| < M\left[\sum_0^\infty \frac{1}{1-\mu\theta^\nu} e^{-\frac{2\pi\nu d}{\omega'}} + \sum_0^\infty \frac{\theta^\nu}{\theta^\nu - \mu} e^{-\frac{2\pi\nu d'}{\omega'}}\right].$$

La quantité entre crochets est finie et ne dépend plus de M.

Pour $x = -d'$ nous donnerons à $F(z)$ la forme

$$F(z) = \sum \frac{1}{\mu} \frac{\mu\theta^\nu - 1}{1-\mu\theta^\nu} A_\nu X^\nu + \frac{1}{\mu} \sum \frac{A_\nu X^\nu}{1-\mu\theta^\nu}$$
$$+ \frac{1}{\mu} \sum \frac{\mu - \theta^\nu}{\theta^\nu - \mu} \frac{B_\nu}{X^\nu} + \frac{1}{\mu} \sum \frac{\theta^\nu}{\theta^\nu - \mu} \frac{B_\nu}{X^\nu},$$

ce qui fait encore

$$F(z) = -\frac{1}{\mu} P(z) + \frac{1}{\mu} \sum \frac{A_\nu X^\nu}{1-\mu\theta^\nu} + \frac{1}{\mu} \sum \frac{B_\nu \theta^\nu}{(\theta^\nu - \mu) X^\nu},$$

d'où

$$|F(z)| < \frac{1}{\mu} M + \frac{1}{\mu} \sum \frac{1}{1-\mu\theta^\nu} \frac{\rho'^\nu}{\rho^\nu} + \frac{1}{\mu} M \sum \frac{\theta^\nu}{\theta^\nu - \mu} \frac{\rho'^\nu}{\rho'^\nu},$$

$$F(z) < M \frac{1}{\mu}\left[1 + \sum \frac{e^{\frac{2\pi(d+d')}{\omega'}}}{1-\mu\theta^\nu} + \sum \frac{\theta^\nu}{\theta^\nu - \mu}\right].$$

La quantité entre crochets est encore finie et indépendante de M. On a donc bien dans toute la bande

$$-d' \leqq x \leqq \omega$$

une limitation supérieure

$$|F(z)| < a.M,$$

$a$ ne dépendant plus de M.

3. Dans le cas particulier où $P(z)$ est identiquement nul, nos calculs nous donneraient

$$F(z) = 0.$$

Il y a cependant dans ce cas des solutions non nulles; l'équation

$$F(x+\omega) - F(x) = 0,$$

par exemple, admet comme solutions toutes les fonctions de périodes $\omega$ et $\omega' i$.

Voici une manière de tourner la difficulté :

Soit $\psi(z)$ une fonction admettant la période $\omega' i$, ayant sur une parallèle à $Oy$ une file de pôles; on prendra par exemple

$$\psi(z) = \frac{1}{e^{\frac{2\pi z}{\omega}} - a}.$$

Posons

$$F(z) = f(z) + \psi(z).$$

L'équation devient

$$f(z+\omega) - \mu f(z) = \mu \psi(z) - \psi(z+\omega) - P(z),$$

$P(z)$ ayant des pôles et n'étant donc pas identiquement nulle. $f(z)$ se détermine ensuite par la méthode ordinaire. La fonction $F(z) = f(z) + \psi(z)$ n'est certainement pas nulle identiquement puisque dans la bande considérée plus haut, $\psi(z)$ a des pôles et $f(z)$ est holomorphe.

Les solutions ainsi trouvées de l'équation

$$F(z+\omega) - \mu F(z) = 0$$

satisfont aux relations

$$F(z+\omega' i) = F(z)$$
$$F(z+\omega) = \mu F(z).$$

Elles rentrent dans la catégorie des fonctions doublement périodiques de seconde espèce [1] qui, par définition, sont telles que

$$F(z+a) = \mu\, F(z),$$
$$F(z+b) = \mu' F(z),$$

[1] Cette dénomination est due à HERMITE, *Mémoire sur quelques applications des fonctions elliptiques* (*Comptes rendus*, 1877 et suiv.).

le rapport $\frac{b}{a}$ étant complexe

$$\frac{b}{a} = r + si$$

avec, pour fixer les idées,

$$s > 0.$$

## IV. — LES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES DE SECONDE ESPÈCE ET LES FONCTIONS Θ DE JACOBI.

Les fonctions doublement périodiques qu'elles soient de première ou de seconde espèce, peuvent toutes se ramener à des fonctions d'un type particulier : les fonctions du type Θ. C'est Jacobi qui, pour la première fois, a introduit ces dernières dans la théorie des fonctions elliptiques.

1. Nous appellerons momentanément $\Theta(z)$ la fonction, définie par son développement en série,

$$(1) \qquad \Theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\pi i}{a}(2nz+n^2b)}$$

$\left[\text{avec toujours } \frac{b}{a} = r + si;\ s > 0\right]$.

C'est une fonction entière. On a en effet

$$\left| e^{\frac{\pi i}{a}(2nz+n^2b)} \right| = e^{-\pi n^2 s - 2n\pi\,\mathfrak{J}\left(\frac{z}{a}\right)},$$

$\mathfrak{J}\left(\frac{z}{a}\right)$ désignant la partie imaginaire de $\frac{z}{a}$. La série des modules est donc comparable à

$$\Sigma\, e^{-\pi s n^2}$$

qui converge puisque $s > 0$.

On vérifie aisément que l'on a

$$(2) \qquad \begin{cases} \Theta(z+a) = \Theta(z), \\ \Theta(z+b) = \Theta(z)\, e^{-\frac{\pi i}{a}(2z+b)}. \end{cases}$$

On peut même prendre ces relations pour définition de $\Theta(z)$ et remonter au développement donné plus haut, en supposant la fonction entière. On peut, en effet, écrire, puisque Θ admet la période $a$,

$$\Theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n e^{\frac{2n\pi i z}{a}}.$$

Alors

$$\Theta(z+b)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{\frac{2n\pi i z}{a}} e^{\frac{2n\pi i b}{a}}.$$

Or

$$e^{-\frac{\pi i}{a}(2z+b)}\Theta(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{\frac{2(n-1)\pi i z}{a}} e^{-\frac{\pi i b}{a}},$$

d'où en identifiant

$$A_n e^{\frac{2n\pi i b}{a}} = A_{n+1} e^{-\frac{\pi i b}{a}}.$$

On en tire

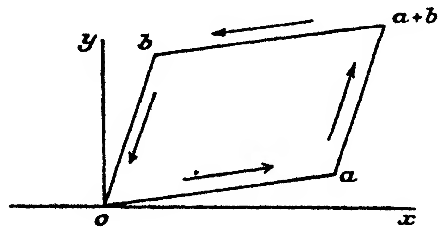
$$A_n = A_0 e^{\frac{\pi i b n^2}{a}},$$

$$\Theta(z)=A_0\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i}{a}(2nz+n^2 b)},$$

ce qui est le développement (1) au facteur $A_0$ près.

Dans le plan de la variable $z$, on pourra construire, comme pour les fonctions doublement périodiques, un réseau de parallélogrammes de côtés $a$ et $b$. Nous les appellerons encore, pour simplifier, des *parallélogrammes de périodes*. Le multiplicateur $e^{\frac{-\pi i}{a}(2z+b)}$ n'a pas de zéros; il en résulte que dans deux parallélogrammes différents, les zéros de la fonction $\Theta(z)$ sont semblablement placés. La détermination de ces

Fig. 55.




zéros est relativement aisée. Considérons par exemple le parallélogramme $(o, a, a+b, b)$. Le nombre des zéros dans ce parallélogramme est donné, comme on le sait, par l'intégrale

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}dz$$

prise dans le sens direct, le long du contour.

Sur les côtés $(a, a+b)$ et $(b, o)$ les termes correspondants de l'intégrale étant égaux et de signes contraires (à cause de la périodicité) se détruisent. Il ne reste donc que

$$2\pi i I = \int_0^a \frac{\theta'(z)}{\theta(z)}dz - \int_b^{a+b} \frac{\theta'(z)}{\theta(z)}dz,$$

$$2\pi i I = \int_0^a \left[\frac{\theta'(z)}{\theta(z)} - \frac{\theta'(z+b)}{\theta(z+b)}\right]dz.$$

Or, de

$$\theta(z+b) = \theta(z)\, e^{-\frac{\pi i}{a}(2z+b)}$$

on tire en prenant la dérivée logarithmique

$$\frac{\theta'(z+b)}{\theta(z+b)} = \frac{\theta'(z)}{\theta(z)} - \frac{2\pi i}{a}.$$

Il vient alors

$$I = \int_0^a \frac{dz}{a} = 1.$$

$\theta(z)$ a donc un *seul zéro* que nous calculerons par l'artifice suivant :

Dans la relation

$$(1') \qquad \theta(z) = e^{-\frac{\pi i z^2}{ab}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i b}{a}\left(n+\frac{z}{b}\right)^2},$$

que l'on obtient facilement en transformant (1), changeons successivement $n$ en $-n$, puis en $n-\lambda$.

Il vient

$$\theta(z) = e^{-\frac{\pi i z^2}{ab}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i b}{a}\left(\frac{z}{b}-n\right)^2},$$

$$\theta(z) = e^{-\frac{\pi i z^2}{ab}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i b}{a}\left(n-\lambda+\frac{z}{b}\right)^2}$$

ou encore

$$\theta(z) = \frac{e^{-\frac{\pi i z^2}{ab}}}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{\frac{\pi i b}{a}\left(\frac{z}{b}-n\right)^2} + e^{\frac{\pi i b}{a}\left(n-\lambda+\frac{z}{b}\right)^2}\right].$$

Cherchons à annuler $\theta(z)$ en annulant séparément chaque terme de cette nouvelle série. Il suffira que l'on ait, *quel que soit n*,

$$\frac{\pi i b}{a}\left(n-\lambda+\frac{z}{b}\right)^2 - \frac{\pi i b}{a}\left(\frac{z}{b}-n\right)^2 = k\pi i,$$

$k$ n'étant assujetti qu'à la condition d'être impair ; on peut encore écrire en simplifiant

$$\left(2\frac{z}{b}-\lambda\right)(2n-\lambda)=k\frac{a}{b}.$$

Prenons pour $\lambda$ un nombre impair arbitraire $2h+1$ déterminé quel que soit $n$ ; $2h'+1$ étant un autre nombre impair arbitraire mais ne dépendant pas de $n$, nous prendrons

$$k=(2n-\lambda)(2h'+1).$$

Nous aurons alors

$$z=\frac{a+b}{2}+h'a+hb,$$

où $h$, $h'$ sont des entiers arbitraires. On voit que *les centres des parallélogrammes de périodes sont des zéros de* $\Theta(z)$. D'après ce que nous avons vu plus haut, *ce sont les seuls.*

**2.** Nous nous proposerons maintenant d'exprimer au moyen de la fonction $\Theta(z)$ une fonction doublement périodique de seconde espèce quelconque.

Considérons à cet effet la fonction élémentaire

$$(3)\qquad f(z)=\frac{e^{\lambda z}\Theta(z+h)}{\Theta(z)},$$

$\lambda$ et $h$ sont des constantes.

Cette fonction a, dans un parallélogramme de périodes, le seul pôle

$$\frac{a+b}{2}+w$$

et le seul zéro

$$\frac{a+b}{2}-h+w\qquad (w=ma+m'b).$$

On a d'ailleurs

$$f(z+a)=e^{\lambda a}f(z),$$
$$f(z+b)=e^{\lambda b-\frac{2\pi i h}{a}}f(z).$$

$f$ est donc une fonction doublement périodique de seconde espèce et ses multiplicateurs sont

$$(4)\qquad \mu=e^{\lambda a},\qquad \mu'=e^{\lambda b-\frac{2\pi i h}{a}}.$$

Dans le seul cas où l'on aurait $h=ma+nb$, la fonction n'aurait ni zéros ni pôles et se réduirait à

$$\mathrm{K}\,e^{\theta z}.$$

qui admet effectivement les multiplicateurs $e^{\theta a}$ et $e^{\theta b}$. On a d'ailleurs bien

$$\mu = e^{\lambda a} = e^{\left(\lambda - \frac{2n\pi i}{a}\right)a} = e^{\theta a},$$
$$\mu' = e^{\lambda b - 2\pi i m - 2i\pi n\frac{b}{a}} = e^{\left(\lambda - \frac{2n\pi i}{a}\right)b} = e^{\theta b};$$

autrement dit, $\mu$ et $\mu'$ sont tels que

$$\mu^b = \mu'^a.$$

Nous laisserons momentanément de côté cette hypothèse; on peut alors déterminer $\lambda$ et $h$ à partir de $\mu$ et $\mu'$ supposés connus.

On a en effet

$$\lambda = \frac{1}{a}\operatorname{Log}\mu, \qquad h = \frac{a}{2\pi i}(\lambda b - \operatorname{Log}\mu').$$

Par le changement de variables $\left(z,\ z + \frac{a+b}{2}\right)$ on peut ramener à l'origine le pôle de l'élément simple et, en multipliant par une constante convenable, faire en sorte que le résidu soit égal à 1. C'est le résultat de ce changement de variables que nous désignerons maintenant par $f(z)$.

On voit que nous sommes en possession *d'un élément simple $f(z)$ obtenu à partir de $\Theta$, doublement périodique de seconde espèce avec les multiplicateurs donnés $\mu$ et $\mu'$, n'ayant qu'un seul zéro et un seul pôle dans un parallélogramme de périodes, ayant à l'origine un pôle dont le résidu est l'unité.*

Soit alors $F(z)$ une fonction doublement périodique de deuxième espèce

$$F(z + a) = \mu\, F(z),$$
$$F(z + b) = \mu' F(z).$$

Construisons l'élément $f(z)$ ayant $\mu$ et $\mu'$ pour multiplicateur. Soit alors

$$\Phi(z) = F(z)\, f(x - z).$$

On a visiblement

$$\Phi(z + a) = \mu\, F(z)\frac{1}{\mu}\, f(x - z) = \Phi(z),$$

$$\Phi(z + b) = \mu' F(z)\frac{1}{\mu'}\, f(x - z) = \Phi(z).$$

$\Phi(z)$ est donc une fonction doublement périodique ordinaire; on sait que pour une telle fonction la somme des résidus pour tous les pôles à l'intérieur d'un parallélogramme de périodes est nulle. Les seuls pôles de $\Phi$ sont : le point $z = x$ pour lequel le résidu est $-F(x)$; les pôles $\alpha$, $\beta$, ... de $F(z)$. On a donc

$$F(x) = \Sigma R_\alpha.$$

Soient

$$F(z) = \frac{A_0}{(z-\alpha)^n} + \frac{A_1}{(z-\alpha)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{z-\alpha} + A_n + \ldots$$

et

$$f(x-z) = f[(x-\alpha)-(z-\alpha)]$$
$$= f(x-\alpha) - (z-\alpha) f'(x-\alpha) + \ldots + (-1)^n \frac{(z-\alpha)^n}{n!} f^{(n)}(x-\alpha) + \ldots$$

les développements de $F$ et $f$ au voisinage du point $\alpha$; le résidu $R_\alpha$ sera de la forme

$$B_0 f(x-\alpha) + B_1 f'(x-\alpha) + \ldots + B_{n-1} f^{(n-1)}(x-\alpha)$$

et l'on aura finalement pour $F(x)$ *la décomposition en éléments simples* due à Hermite

$$(5) \qquad F(x) = \Sigma[B_0 f(x-\alpha) + \ldots + B_{n-1} f^{(n-1)}(x-\alpha)]$$

la sommation étant étendue à tous les pôles de $F(x)$.

Ce raisonnement et ces calculs ne peuvent être faits dans le cas particulier signalé plus haut, où $\mu$ et $\mu'$ sont de la forme

$$\mu = e^{\theta a}, \qquad \mu' = e^{\theta b}.$$

Remarquons alors que dans ce cas la fonction

$$F_1(z) = F(z) e^{-\theta z}$$

est une fonction doublement périodique ordinaire.

Nous allons maintenant chercher à exprimer $F_1(z)$ au moyen de $\Theta$ lorsque $F_1(z)$ est une fonction doublement périodique ordinaire, absolument quelconque.

L'élément simple que nous utiliserons sera cette fois la fonction

$$\zeta(z) = \frac{\Theta'\left(z + \dfrac{a+b}{2}\right)}{\Theta\left(z + \dfrac{a+b}{2}\right)}.$$

Il est aisé de voir que l'on a

$$\zeta(z+a) = \zeta(z),$$
$$\zeta(z+b) = \zeta(z) - \frac{2\pi i}{a}.$$

Cette fonction admet d'ailleurs à l'origine un pôle dont le résidu est 1.

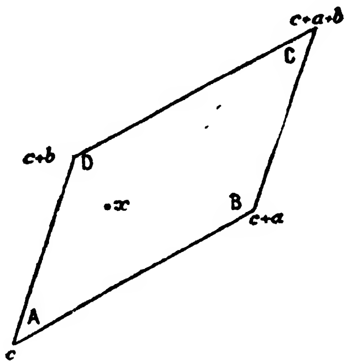
Considérons encore la fonction

$$\Phi_1(z) = F_1(z)\zeta(x-z),$$

et intégrons-la suivant le contour d'un parallélogramme de périodes entourant le point $x$.

Sur BC et sur DA, $\Phi_1$ prend les mêmes valeurs; sur CD et AB ces valeurs diffèrent de $\frac{2\pi i}{a}\Phi_1(z)$.

Fig. 56.




L'intégrale est donc une constante C ne dépendant pas de $x$.

En reprenant le raisonnement fait plus haut pour le cas général, on trouve

$$(b)\quad \begin{cases} F_1(x) = C + \Sigma[A_0\,\zeta(x-\alpha) + \ldots + A_{n-1}\,\zeta^{(n-1)}(x-\alpha)], \\ F(x) = C e^{\theta x} + \Sigma[B_0 f_1(x-\alpha) + \ldots + B_{n-1} f_1^{(n-1)}(x-\alpha)] \end{cases}$$

avec

$$f_1(x) = \zeta(x)e^{\theta x}.$$

Il intervient ici la condition restrictive

$$F_1(x+b) - F_1(x) = 0$$

qui, en identifiant, se réduit à

$$\Sigma A_0 = 0,$$

ce qui entraîne

$$\Sigma[B_0 + B_1\theta + \ldots + B_{n-1}\theta^{n-1}]e^{-\theta\alpha} = 0.$$

la sommation étant toujours étendue à tous les pôles de $F_1$.

En particulier si $\theta = 0$, ces résultats s'appliquent encore, la fonction F à développer étant alors une fonction doublement périodique ordinaire.

3. Certaines fonctions elliptiques — la fonction $\lambda(z)$ par exemple — s'expriment, plus simplement encore au moyen de quatre fonctions analogues à $\Theta$ et que nous désignerons par $\Theta$, $\Theta_1$, H, $H_1$ ; ces quatre fonctions satisfont chacune à l'un des quatre systèmes définis par les équations

$$f(z+2K)=\pm f(z),$$
$$f(z+2iK')=\pm e^{-\frac{\pi i}{K}(z+iK')}f(z).$$

On obtient $\Theta_1(z)$ en posant $a=2K$, $b=2iK'$ dans le développement (1).

On a donc bien les relations

(α) $$\begin{cases}\Theta_1(z+2K)=\Theta_1(z),\\ \Theta_1(z+2iK')=e^{-\frac{\pi i}{K}(z+iK')}\Theta_1(z).\end{cases}$$

La fonction que nous désignerons maintenant par $\Theta$ est définie par la relation

(A) $$\Theta(z)=\Theta_1(z-K),$$

ce qui entraîne

(β) $$\begin{cases}\Theta(z+2K)=\Theta(z),\\ \Theta(z+2iK')=-e^{-\frac{\pi i}{K}(z+iK')}\Theta(z).\end{cases}$$

On a ensuite

(B) $$H(z)=-i\Theta_1(z-K+iK')e^{\frac{i\pi}{4K}(2z+iK')},$$

d'où

(γ) $$\begin{cases}H(z+2K)=-H(z),\\ H(z+2iK')=-e^{-\frac{\pi i}{K}(z+iK')}H(z)\end{cases}$$

et enfin

(C) $$H_1(z)=H(z+K)$$

avec

(δ) $$\begin{cases}H_1(z+2K)=-H_1(z),\\ H_1(z+2iK')=e^{-\frac{i\pi}{K}(z+iK')}H_1(z).\end{cases}$$

La notation $\Theta$ a changé de signification, mais aucune confusion n'est possible.

En combinant (B) et (A) et tenant compte de $\beta$, il vient

$$H(z)=-i\Theta(z+iK'+2K)e^{\frac{i\pi}{4K}(2z+iK')}=-i\Theta(z+iK')e^{\frac{i\pi}{4K}(2z+iK')}$$

On a aussi

$$H(z+iK') = -i\Theta(z-2K+2iK')e^{\frac{i\pi}{4K}(2z+3iK')} = i\Theta(z)e^{-\frac{i\pi}{4K}(2z+iK')},$$

c'est-à-dire en définitive le groupe de relations

$$(\Sigma)\qquad \begin{cases} H(z+iK') = i\,\Theta(z)\,e^{-\frac{i\pi}{4K}(2z+iK')}, \\ \Theta(z+iK') = i\,H(z)\,e^{-\frac{i\pi}{4K}(2z+iK')}, \end{cases}$$

d'où l'on peut conclure

$$(D)\qquad \frac{H(z+iK')}{\Theta(z+iK')} = \frac{\Theta(z)}{H(z)}.$$

Les zéros de $\Theta_1$ sont, d'après sa définition, les points

$$K + iK' + w.$$

Il en résulte que les zéros de $\Theta$ sont, d'après (A), les points

$$iK' + w;$$

ceux de H

$$w;$$

ceux de $H_1$

$$K + w,$$

$w$ désignant la quantité $2mK + 2m'iK'$, où $m$ et $m'$ sont des entiers arbitraires.

Soit alors le quotient

$$\chi(z) = \frac{H(z)}{\Theta(z)}.$$

On a, d'après ($\beta$) et ($\gamma$),

$$\chi(z+4K) = \chi(z),$$
$$\chi(z+2iK') = \chi(z).$$

$\chi(z)$ admet donc les deux périodes $4K$ et $2iK'$.

Dans chaque parallélogramme de ces périodes cette fonction a deux zéros simples qui sont ceux de H : par exemple $0$ et $2K$; elle a aussi deux pôles simples $2K + iK'$ et $iK'$ par exemple.

$\chi$ admet, comme on le voit, mêmes périodes, mêmes pôles et mêmes zéros que la fonction $\lambda(z)$; elle n'en différera donc que par une constante C que nous allons déterminer.

On a

$$(7)\qquad \lambda(z) = C\frac{H(z)}{\Theta(z)}$$

et aussi

$$\lambda(z + i\mathrm{K}') = \mathrm{C}\,\frac{\mathrm{H}(z + i\mathrm{K}')}{\Theta(z + i\mathrm{K}')} = \mathrm{C}\,\frac{\Theta(z)}{\mathrm{H}(z)},$$

en appliquant la relation (D).

On a vu d'autre part (Chap. II, section III, 2) que

$$\lambda(z + i\mathrm{K}') = \frac{1}{k\,\lambda(z)} = \frac{1}{k\mathrm{C}}\,\frac{\Theta(z)}{\mathrm{H}(z)}.$$

On a par conséquent

$$\mathrm{C}^2 = \frac{1}{k}, \qquad \mathrm{C} = \pm\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

D'autre part C est positif : on a en effet

$$\frac{1}{\mathrm{C}}\lambda(\mathrm{K}) = \frac{1}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{H}(\mathrm{K})}{\Theta(\mathrm{K})} = \frac{\Sigma\, e^{-\frac{\pi m^2 \mathrm{K}'}{\mathrm{K}}}}{e^{-\frac{\pi \mathrm{K}'}{\mathrm{K}}}\,\Sigma\, e^{-\frac{\pi \mathrm{K}'}{\mathrm{K}}(m + m^2)}} > 0.$$

Alors

$$\mathrm{C} = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

et

$$\operatorname{sn} z = \lambda(z) = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{H}(z)}{\Theta(z)}.$$

On exprime de même les fonctions $\operatorname{cn} z$ et $\operatorname{dn} z$; en posant $k' = \sqrt{1 - k^2}$, on a

$$\operatorname{cn} z = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta_1(z)}, \qquad \operatorname{dn} z = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta_1(z)}{\Theta(z)}.$$

## V. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU TYPE DE FUCHS A COEFFICIENTS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES ET A INTÉGRALES UNIFORMES (1).

Nous nous proposons d'étudier les intégrales de l'équation différentielle linéaire

$$\text{(E)} \qquad \frac{d^m y}{dz^m} + \mathrm{P}_1\,\frac{d^{m-1} y}{dz^{m-1}} + \ldots + \mathrm{P}_m y = 0,$$

lorsque les P sont des *fonctions de z doublement périodiques* et de périodes $\omega$ et $\omega'$; nous supposerons en outre que *l'intégrale générale est uniforme et que tous ses points singuliers à distance finie sont*

(1) E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, Chap. XV, § 11-16; *Comptes rendus*, 1879 et 1880; *Journal de Crelle*, t. 90.

*de la classe de Fuchs* ($P_i$ devra avoir, en un tel point, au plus un pôle d'ordre $i$). Nous verrons que, *dans ce cas, l'intégrale générale peut s'exprimer à l'aide des transcendantes de la théorie des fonctions elliptiques.*

---

1. Nous établirons pour commencer le théorème fondamental suivant :

*L'équation* (E) *admet au moins une intégrale doublement périodique de seconde espèce.*

Soit en effet

$$\varphi_1(z),\quad \varphi_2(z),\quad \ldots,\quad \varphi_m(z),$$

un système fondamental d'intégrales; les fonctions

$$\varphi_1(z+\omega),\quad \varphi_2(z+\omega),\quad \ldots,\quad \varphi_m(z+\omega)$$

seront aussi des intégrales, étant donnée la périodicité des coefficients de (E).

On aura par conséquent

$$(1)\qquad \varphi_i(z+\omega) = a_{i1}\,\varphi_1(z)+\ldots+a_{im}\,\varphi_m(z)\qquad (i=1,2,\ldots,m),$$

les $a_{i1}$ étant des constantes. En cherchant à ramener cette substitution à la forme canonique, on obtiendra au moins une combinaison,

$$f_1(z) = \alpha_1\,\varphi_1(z)+\ldots+\alpha_m\,\varphi_m(z)$$

qui se reproduise multipliée par un facteur constant quand on change $z$ en $z+\omega$. Envisageons alors la suite des fonctions

$$f_1(z),\quad f_1(z+\omega'),\quad f_1(z+2\omega'),\quad \ldots$$

qui sont toutes des intégrales de l'équation E. Entre les $n+1$ premières de ces fonctions — $n$ étant inférieur ou égal à $m$ — existera une relation homogène et linéaire à coefficients constants, puisque l'équation ne peut avoir plus de $m$ intégrales linéairement indépendantes. En prenant pour $n$ le plus petit nombre possible, nous aurons

$$f_1(z+n\omega') = b_1\,f_1(z)+b_2\,f_1(z+\omega')+\ldots+b_n\,f_1[z+(n-1)\omega'],$$

$b_1$ étant différent de zéro, puisque autrement le changement de $z$ en $z-\omega$ montrerait l'existence d'une relation linéaire entre les $n$ premières fonctions de la suite. Posons

$$
\begin{aligned}
f_1(z+\omega') &= 0 + f_2(z) + 0 + \ldots + 0,\\
f_1(z+2\omega') = f_2(z+\omega') &= 0 + 0 + f_3(z) + \ldots + 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
f_1[z+(n-1)\omega'] = f_{n-1}(z+\omega') &= 0 + \ldots + f_n(z).
\end{aligned}
$$

Nous aurons

$$
f_1(z+n\omega') = f_n(z+\omega') = b_1 f_1(z) + \ldots + b_n f_n(z) \quad (b_1 \neq 0),
$$

le déterminant de la substitution définie par ces $n$ relations est égal à $b_1$. On peut donc mettre la substitution sous forme canonique, on voit qu'il existera une combinaison linéaire

$$
\Psi(z) = \beta_1 f_1(z) + \ldots + \beta_n f_n(z)
$$

se reproduisant a un facteur constant près quand on change $z$ en $z+\omega'$. Cette combinaison ne sera certainement pas identiquement nulle d'après la façon dont on a choisi $n$. D'autre part, la fonction $\Psi(z)$ se reproduit aussi comme $f_1$ à un facteur constant près quand on change $z$ en $z+\omega$. Nous avons donc

$$
\begin{aligned}
\Psi(z+\omega) &= \mu\,\Psi(z),\\
\Psi(z+\omega') &= \mu'\,\Psi(z).
\end{aligned}
$$

Le théorème annoncé est donc démontré. On peut même affirmer que dans le cas où *l'équation en s de la substitution* (1) *a toutes ses racines distinctes, il existe un système fondamental d'intégrales qui sont des fonctions doublement périodiques de seconde espèce.*

2. On peut obtenir facilement dans tous les cas la forme générale des autres intégrales de l'équation donnée. Soit $\Psi_1(z)$ l'intégrale trouvée au paragraphe précédent; en posant

$$
y = \Psi_1(z)\int Y\,dz,
$$

on aura pour $Y$ une équation d'ordre $(m-1)$, du même type que (E), dont l'intégrale générale sera uniforme, puisque l'on a

$$
Y = \frac{d}{dz}\left[\frac{y}{\Psi_1(z)}\right],
$$

et que l'on suppose $y$ uniforme.

Cette équation admettra, elle aussi, au moins une intégrale $\Psi_2(z)$ doublement périodique de seconde espèce, et l'on continuera ainsi de proche en proche jusqu'à obtenir le système fondamental

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \Psi_1(z),\\
y_2 &= \Psi_1(z)\int \Psi_2(z)\,dz,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots,\\
y_m &= \Psi_1(z)\int \Psi_2(z)\,dz \int \dots \int \Psi_m(z)\,dz;
\end{aligned}
$$

les fonctions $\Psi_1$, $\Psi_2$, ..., $\Psi_m$ étant des fonctions doublement périodiques de seconde espèce.

3. Il est intéressant de rechercher plus explicitement la forme de ces intégrales.

Prenons une équation du second ordre ; on a les deux intégrales

$$y_1 = \Psi_1(z), \qquad y_2 = \Psi_1(z)\int \Psi_2(z)\,dz.$$

Nous devons nous rendre compte de la nature de l'intégrale $y_2$ qui *par hypothèse doit être uniforme*. Trois cas sont à envisager :

*a. Les multiplicateurs* $\mu_2$ *et* $\mu'_2$ *de* $\Psi_2$ *ne sont pas de la forme* $e^{\theta\omega}$, $e^{\theta\omega'}$.

Alors $\Psi_2$ peut s'écrire

$$\Psi_2 = \Sigma[A_0 f(z-\alpha) + \dots + A_{n-1} f^{(n-1)}(z-\alpha)],$$

où

$$f(z) = \frac{e^{\lambda z}\,\Theta(z+h)}{\Theta(z)}.$$

Pour que l'intégration ne donne pas de logarithmes il faudra que tous les $A_0$ soient nuls et l'on pourra prendre, par suite,

$$(2) \qquad \int \Psi_2(z)\,dz = \Sigma[A_1 f(z-\alpha) + \dots + A_{n-1} f^{(n-2)}(z-\alpha)].$$

L'intégrale $y_2$ sera alors comme $y_1$, *une fonction de seconde espèce.*

*b. Les multiplicateurs sont de la forme* $e^{\theta\omega}$, $e^{\theta\omega'}$ *avec* $\theta \neq 0$.

On a dans ce cas

$$\Psi_2 = C e^{\theta z} + \Sigma[B_0 f_1(z-\alpha) + \dots + B_{n-1} f_1^{(n-1)}(z-\alpha)]$$

avec

$$f_1(z) = e^{\theta z}\zeta(z)$$

et

$$\Sigma(\mathrm{B}_0 + \mathrm{B}_1\theta + \ldots + \mathrm{B}_{n-1}\theta^{n-1})e^{-\alpha\theta} = 0.$$

Pour que l'intégration n'introduise pas de logarithmes il faut supposer que tous les $\mathrm{B}_0$ soient nuls. Il vient alors

$$\int \Psi_2\, dz = \frac{\mathrm{C}}{\theta}e^{\theta z} + \Sigma[\mathrm{B}_1 f_1(z-\alpha) + \ldots + \mathrm{B}_{n-1} f_1^{(n-2)}(z-\alpha)]$$

avec

$$\Sigma(\mathrm{B}_1 + \mathrm{B}_2\theta + \ldots + \mathrm{B}_{n-1}\theta^{n-2})e^{-\alpha\theta} = 0.$$

L'intégrale $y_2$ obtenue est donc encore une *fonction de seconde espèce.*

*c. On a* $\theta = 0$; $\Psi_2$ *est une fonction doublement périodique ordinaire.*

Alors

$$\Psi_2 = \Sigma[\mathrm{A}_0\zeta(z-\alpha) + \ldots + \mathrm{A}_{n-1}\zeta^{(n-1)}(z-\alpha)] + \mathrm{C}$$

avec

$$\Sigma\,\mathrm{A}_0 = 0.$$

Les $\mathrm{A}_0$ devront être nuls comme plus haut, il vient alors

$$\int \Psi_2\, dz = \mathrm{C}z + \Sigma[\mathrm{A}_1\zeta(z-\alpha) + \ldots + \mathrm{A}_{n-1}\zeta^{(n-2)}(z-\alpha)].$$

En choisissant des coefficients A' tels que

$$\Sigma\,\mathrm{A}'_1 = 0,$$

on peut écrire

$$\int \Psi_2\, dz = \mathrm{C}z + \Sigma(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_1)\zeta(z) + \Sigma(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}'_1)[\zeta(z-\alpha) - \zeta(z)] \\ + \Sigma[\mathrm{A}_1\zeta'(z-\alpha) + \ldots + \mathrm{A}_n\zeta^{(n-2)}(z-\alpha)] \tag{3}$$

la fonction $\zeta(z-\alpha) - \zeta(z)$ étant doublement périodique ordinaire, on peut dire que, dans les trois cas examinés, $y_2$ se met sous la forme d'un *polynome du premier degré en* $z$ *et* $\zeta(z)$ *dont les coefficients sont des fonctions doublement périodiques aux mêmes multiplicateurs.*

On démontre plus généralement que : *l'intégrale générale d'une équation* (E) *d'ordre* $m$ *peut se mettre sous la forme d'un polynome de degré* $m-1$ *en* $z$ *et* $\zeta(z)$, *les coefficients étant des fonctions doublement périodiques aux mêmes multiplicateurs* (¹).

---

(¹) *Voir* Picard, *Traité d'Analyse (loc. cit.)* et G. Floquet, *Comptes rendus*, t. 98, p. 82.

**4.** Nous prendrons comme exemple l'équation de Lamé

$$\frac{d^2y}{dz^2} = [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 z + h]y.$$

Hermite (1) avait déjà montré par un calcul direct que l'intégrale s'obtenait à l'aide des transcendantes de la théorie des fonctions elliptiques.

Voici comment Lamé (2) avait été conduit à cette équation : Dans la théorie de la chaleur se présente l'équation de Laplace

$$(4) \qquad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

que Lamé traite de la façon suivante.

Il prend pour nouvelles variables les coordonnées elliptiques $\mu$, $\nu$, $\rho$ correspondant à $x$, $y$, $z$ et données par l'équation en $\lambda$

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1.$$

En supposant pour fixer les idées

$$c < b, \qquad \nu < \mu < \rho,$$

on a les relations d'inégalités suivantes :

$$0 < \nu^2 < b^2 < \mu^2 < c^2 < \rho^2.$$

On prend ensuite comme nouvelles variables :

$$\alpha = c\int_0^\nu \frac{d\nu}{\sqrt{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}},$$

$$\beta = c\int_b^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}},$$

$$\gamma = c\int_c^\rho \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}},$$

$\nu(\alpha)$, $\mu(\beta)$, $\rho(\gamma)$ sont des fonctions doublement périodiques puisqu'elles résultent de l'inversion d'intégrales elliptiques de première espèce. Le changement de variables donne comme nouvelle équation

$$(5) \qquad (\rho^2 - \mu^2)\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} + (\rho^2 - \nu^2)\frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} + (\mu^2 - \nu^2)\frac{\partial^2 V}{\partial \gamma^2} = 0.$$

---

(1) HERMITE, *Mém. cit.*

(2) LAMÉ, *Traité des surfaces isothermes*, p. 277.

Cherchons si l'on peut satisfaire à cette équation au moyen d'un produit

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = N(\alpha)\,M(\beta)\,R(\gamma)$$

et trois fonctions dépendant respectivement de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Il vient en substituant :

$$(6) \qquad \frac{1}{N}(\rho^2-\mu^2)\frac{d^2N}{d\alpha^2} - \frac{1}{M}(\nu^2-\rho^2)\frac{d^2M}{d\beta^2} + \frac{1}{R}(\mu^2-\nu^2)\frac{d^2R}{d\gamma^2} = 0.$$

On a d'ailleurs

$$(\rho^2-\mu^2) \quad + (\mu^2-\nu^2) \quad + (\nu^2-\rho^2) \quad \equiv 0.$$
$$(\rho^2-\mu^2)\nu^2 + (\mu^2-\nu^2)\rho^2 + (\nu^2-\rho^2)\mu^2 \equiv 0.$$

d'où l'on tire

$$(\rho^2-\mu^2)\left(\frac{g}{c^2}\nu^2 + h\right) + (\nu^2-\rho^2)\left(\frac{g}{c^2}\mu^2 + h\right) + (\mu^2-\nu^2)\left(\frac{g\rho^2}{c^2} + h\right) = 0,$$

$h$ et $g$ étant des constantes quelconques. On satisfera donc à (6) en prenant

$$\frac{1}{N}\frac{d^2N}{d\alpha^2} = \frac{g}{c^2}\nu^2 + h,$$
$$\frac{1}{M}\frac{d^2M}{d\beta^2} = \frac{g}{c^2}\mu^2 + h,$$
$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{d\gamma^2} = \frac{g}{c^2}\rho^2 + h.$$

Si l'on prend

$$b = 1, \qquad \frac{1}{c} = k < 1,$$

on a

$$\nu = \operatorname{sn}\alpha, \qquad \mu = \operatorname{sn}\beta, \qquad \rho = \operatorname{sn}\gamma,$$

puisque, par exemple,

$$\alpha = c\int_0^\nu \frac{d\nu}{\sqrt{(1-\nu^2)(c^2-\nu^2)}} = \int_0^\nu \frac{d\nu}{\sqrt{(1-\nu^2)(1-k^2\nu^2)}}.$$

En d'autres termes on est ramené à résoudre une équation de la forme

$$(7) \qquad \frac{d^2y}{dz^2} = (gk^2\operatorname{sn}^2 z + h)\,y.$$

L'équation (7) est du type à intégrale générale régulière ($P_2$ ici égal à $gk^2\operatorname{sn}^2 z + h$, n'a en effet comme points singuliers que des pôles doubles), mais nous allons voir que cette intégrale générale n'est uniforme que pour

$$g = n(n+1) \qquad (n \text{ étant entier}).$$

La fonction $\mathrm{sn}^2 x$ admet pour périodes $2K$ et $2iK'$, les points $iK' + w$ étant les seuls pôles doubles. Voyons ce qui se passe au point $iK'$ par exemple. On a

$$\mathrm{sn}^2(iK' + \varepsilon) = \frac{1}{k^2 \,\mathrm{sn}^2 \varepsilon} = \frac{1}{k^2 \varepsilon^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1+k^2}{k^2}\right) + \ldots,$$

le développement ne comportant que des termes pairs.

Soit alors une intégrale de l'équation (7) ayant pour premier terme de son développement autour de $iK'$ l'expression $A_\mu \varepsilon^\mu$ ($\mu$ devra être entier pour que l'intégrale soit uniforme, mais pourra être soit positif soit négatif). Portons dans (7) et identifions; il vient comme première condition pour déterminer $\mu$,

$$\mu(\mu - 1) A_\mu \varepsilon^{\mu-2} = g A_\mu \varepsilon^{\mu-2},$$

$$\mu(\mu - 1) = g, \tag{8}$$

*c'est l'équation déterminante fondamentale de l'équation* (7).

On voit que si cette équation a une racine entière, $g$ est bien de la forme

$$g = n(n+1).$$

L'équation est alors

$$\mu(\mu - 1) = n(n+1)$$

et admet les deux racines

$$\mu = -n, \qquad \mu = n + 1.$$

D'après la théorie de Fuchs, il correspond effectivement à la plus grande racine une intégrale

$$y_1 = (x - iK')^{n+1} \Psi_1(x),$$

la fonction $\Psi_1(x)$ étant holomorphe au voisinage de $iK$, différente de O en ce point et paire en $(x - iK')$. Soit alors $y_2$ une seconde intégrale de (7) on aura

$$y_2 \frac{d^2 y_1}{dx^2} - y_1 \frac{d^2 y_2}{dx^2} = 0,$$

et par conséquent

$$y_2 = y_1 \int \frac{c\, dx}{y_1^2},$$

$c$ étant constant. Comme $y_1^2$ ne renferme que des termes pairs en $(x - iK')$, l'intégration ne donne pas de logarithme; $y_2$ qui est l'intégrale générale est donc uniforme et admet un pôle d'ordre

$$-(n+1) + 2(n+1) - 1 = n$$

au point $iK'$.

Pour exprimer ces intégrales, nous prendrons comme élément simple la fonction

$$f(z) = \frac{H(z+\omega)}{H(z)} e^{\lambda z},$$

$\omega$ et $\lambda$ étant des constantes à déterminer (c'est au fond l'élément simple que nous avons déjà pris plus haut).

Une intégrale aura la forme

$$(9) \qquad A_0 f(z - iK') + \ldots + A_{n-1} f^{(n-1)}(z - iK'),$$

puisqu'il y a le seul pôle $iK'$ et que ce pôle est d'ordre $n$.

Posons encore

$$z - iK' = \Sigma$$

et portons l'expression (9) dans l'équation (7). On obtient, en réduisant, des termes en

$$\varepsilon^{-(n+2)}, \quad \varepsilon^{-(n+1)}, \quad \ldots, \quad \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon^{0}, \quad \ldots, \quad \varepsilon^{p}, \quad \ldots;$$

le premier disparaît d'ailleurs puisque c'est en l'annulant qu'on a obtenu l'équation fondamentale déterminante.

On obtiendra, en annulant les coefficients des termes à exposants négatifs, $n+1$ *relations linéaires et homogènes en* $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$; les coefficients de ces équations *dépendent d'ailleurs de* $\lambda$ *et* $\omega$. *On aura donc finalement deux équations en* $\lambda$ *et* $\omega$. Cela suffira pour l'identification; les termes qui restent constituent en effet une fonction entière doublement périodique de seconde espèce, c'est-à-dire (puisque l'on a pris pour $h$ une valeur arbitraire et que par conséquent les multiplicateurs n'ont pas des valeurs particulières) *identiquement nulle*.

Nous avons ainsi obtenu une intégrale $F(z)$, fonction de seconde espèce. Si $h$ est quelconque, $F(-z)$ est une autre intégrale distincte de la première.

Indiquons le calcul pour $n = 1$. L'équation est alors

$$(10) \qquad \frac{d^2 y}{dz^2} = (2k^2 \operatorname{sn}^2 z + h) y.$$

Nous prendrons un élément un peu différent :

$$f(z) = \frac{H(z+\omega)}{\Theta(z)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right] z}.$$

Ici $n - 1 = 0$, on devra prendre

$$F(z) = A_0 f(z).$$

Pour le calcul du développement de $f(z)$ suivant les puissances de

$$z - i\mathrm{K}' = \varepsilon,$$

nous renverrons au Mémoire d'Hermite *Sur quelques applications des fonctions elliptiques* (¹) et nous écrivons, d'après lui,

$$\chi(z) = \frac{f(z)}{e^{\lambda z}} = c\left[\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\Omega\varepsilon - \frac{1}{3}\Omega_1\varepsilon^2 - \frac{1}{8}\Omega_2\varepsilon^3 - \ldots\right]$$

où $c$ est une constante dépendant de $\omega$, mais qui ne jouera aucun rôle. et où l'on a

$$\begin{aligned}
\Omega &= k^2\,\mathrm{sn}^2\omega - \frac{1+k}{3},\\
\Omega_1 &= k^2\,\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{cn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega,\\
\Omega_2 &= 2k^4\,\mathrm{sn}^4\omega - \frac{2(k^2+k^4)}{3}\,\mathrm{sn}^2\omega - \frac{7-22k^2+7k^4}{45}.
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
f(i\mathrm{K}'+\varepsilon) &= \mathrm{C}\left[\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\Omega\varepsilon - \frac{1}{3}\Omega_1\varepsilon^2 + \ldots\right]\left[1 + \lambda\varepsilon + \frac{h^2\varepsilon^2}{2!} + \ldots\right]\\
&= \mathrm{C}\left[\frac{1}{\varepsilon} + \lambda + \frac{\lambda^2-\Omega}{2}\varepsilon + \ldots\right].
\end{aligned}$$

Substituons dans l'équation (10) en tenant compte de ce que

$$k^2\,\mathrm{sn}^2(i\mathrm{K}'+\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{3}(1+k^2) + \ldots.$$

Nous avons d'après la théorie générale à annuler les termes $\varepsilon^2$ et $\varepsilon$ pour détourner $\lambda$ et $\omega$.

On obtient immédiatement

$$\lambda = 0, \qquad 1 + k^2 - h - \mathrm{sn}^2\omega = 0.$$

La solution est donc

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{A}\,\frac{\mathrm{H}(z+\omega)}{\Theta(z)}\,e^{-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}z}$$

$\omega$ étant déterminé par l'équation

$$1 + k^2 + h - \mathrm{sn}^2\omega = 0.$$

5. M. É. Picard a donné (²) le premier exemple d'une équation linéaire d'ordre supérieur au second, rentrant dans la famille que nous

(¹) Tome III, des *Œuvres* d'Hermite (p. 279).
(²) É. PICARD, *Comptes rendus* (1880) et *Journal de Crelle* (*loc. cit.*).

étudions. C'est l'équation

$$\frac{d^3y}{dz^3} + (h - 6k^2\,\mathrm{sn}^2 z)\frac{dy}{dz} + h_1 y = 0, \tag{11}$$

$h$ et $h_1$ étant deux constantes quelconques.

L'équation fondamentale déterminante est ici

$$\mu(\mu-1)(\mu-2) - 6\mu = 0$$

elle a pour racines 4, 0, $-1$.

En posant encore

$$y = \frac{\mathrm{H}(x+\omega)}{\Theta(x)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]x}$$

les constantes $\lambda$ et $\omega$ sont déterminées par les deux équations

$$h - (1+k^2) + 3(\lambda^2 - k^2\,\mathrm{sn}^2\omega) = 0,$$
$$2\lambda^3 - 6\lambda k^2\,\mathrm{sn}^2\omega + 2\lambda(1+k^2) - k^2\,\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{cn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega - h_1 = 0.$$

L'élimination de $\lambda$ donne

$$h_1 + 8h_1k^2\,\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{cn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega + \mathrm{M}\,\mathrm{sn}^2\omega + \mathrm{N} = 0, \tag{$\alpha$}$$

où M et N sont des polynomes en $h$.

Le premier membre de cette dernière équation est une fonction doublement périodique de $\omega$ aux périodes $2\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$, avec le pôle triple $i\mathrm{K}'$. Il y a donc trois racines dans un rectangle de périodes et l'on obtient, si $h$ et $h_1$ sont arbitraires, trois solutions distinctes de l'équation différentielle. En faisant $h_1 = 0$, on retombe sur l'équation de Lamé pour $n = 2$.

L'équation

$$\frac{d^3y}{dz^3} + [h - n(n+1)k^2\,\mathrm{sn}^2 z]\frac{dy}{dz} + h_1 y = 0.$$

qui pourrait paraître généraliser à la fois l'équation de Lamé et l'équation (11) n'a pas en général d'intégrales uniformes pour $n > 2$.

Voici enfin un dernier exemple.

Soit le système des équations linéaires

$$\frac{du}{ds} = \frac{v}{\mathrm{R}}, \qquad \frac{dv}{ds} = -\frac{u}{\mathrm{R}} - \frac{w}{r}, \qquad \frac{dw}{ds} = \frac{v}{r},$$

on peut considérer R et $r$ comme les rayons de courbure et de torsion d'une courbe gauche et les supposer exprimés en fonction de l'arc $s$. Un système d'intégrales est formé par les neuf cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale. Supposons R et $r$ doublement périodiques, l'intégrale générale du système étant uniforme. On peut montrer que, dans ce cas, le système admet un système d'intégrales périodiques *de première espèce*. On en conclut qu'il existe une direction telle que tangente, normale principale, binormale fassent avec elle des angles égaux quand on change $s$ en $s+\sigma$ ($\sigma$ étant une constante convenable). Citons comme exemple le cas où

$$\frac{1}{R} = \frac{2n}{a}\,\mathrm{dn}\left(\frac{s}{a}\right), \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{b},$$

$a$ et $b$ étant deux constantes, $n$ un entier positif et $dn$ la troisième fonction elliptique.

## VI. — TRANSCENDANTES DE M. PICARD.

Revenons au problème examiné au Chapitre II. Il s'agissait de déterminer un système de fonctions uniformes dans tout le plan, admettant le théorème de multiplication rationnel :

$$(1) \qquad \begin{cases} f(au) = R_1[f(u), \varphi(u), \ldots, \psi(u)] \\ \varphi(au) = R_2[f(u), \varphi(u), \ldots, \psi(u)] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi(au) = R_n[f(u), \varphi(u), \ldots, \psi(u)] \end{cases} \qquad |a| > 1,$$

en supposant que les termes du premier degré dans $R_1, R_2, \ldots, R_n$ se réduisent respectivement à $a_1 f, a_2\varphi, \ldots, a_m\psi$.

Nous avons vu que si l'on pose

$$K(s) = (a_1 - s)\ldots(a_m - s),$$

il est possible de satisfaire au système (1) par des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine, à condition que $K(a^p)$ soit nul pour une valeur de $p$ et une valeur seulement. Dans le cas (qui, somme toute, est le cas général) où $K(a^p)$ n'est nul pour aucune valeur de $p$, on voit immédiatement en calculant de proche en proche les coefficients des développements des fonctions inconnues, qu'il n'y a pas d'autre solution holomorphe que la solution banale

$$f = \varphi = \ldots = \psi = 0.$$

M. É. Picard (¹) a montré *qu'il existe dans ce cas un système de*

---

(¹) É. Picard, *Sur une classe de transcendantes nouvelles* (*Acta Mathem.*, t. 18 et 23); *Sur une classe de transcendantes généralisant les fonctions elliptiques et abéliennes* (*Annales de l'École Normale*, t. 10, 3ᵉ série, 1913).

*fonctions satisfaisant au système* (1) *et possédant à l'origine un point essentiel isolé. Si les substitutions sont crémoniennes, ces fonctions sont uniformes dans tout le plan. Sinon on ne peut affirmer l'uniformité qu'à l'extérieur d'un cercle ayant l'origine pour centre* (*on a supposé comme toujours* $|a| > 1$). Après avoir démontré ces résultats par une méthode d'approximations successives fort analogue (tout au moins pour les démonstrations de convergence) à celle employée plus haut, nous verrons que *l'on peut encore déterminer de telles solutions dans le cas précédemment exclu où l'équation*

$$K(S) = 0$$

*aurait des racines de la forme* $a^p$.

Nous ferons la démonstration en supposant (ce qui ne diminue d'ailleurs pas la généralité) $a$ réel et positif.

**1.** Si l'on fait le changement de variables

$$u = e^{\frac{2\pi z}{\omega'}},$$

les fonctions inconnues $f(u), \ldots, \psi(u)$, supposées avoir à l'origine un point singulier essentiel se transforment en de nouvelles fonctions que nous désignerons par

$$f(z), \quad \ldots, \quad \psi(z)$$

qui admettent la période $\omega' i$ et qui sont uniformes si les premières le sont. Ces fonctions devront être des solutions du nouveau système,

$$(2)\quad \begin{cases} f(z+\omega) = R_1[f(z), \ldots, \psi(z)] = a_1 f(z) + Q_1[f(z), \ldots, \psi(z)], \\ \varphi(z+\omega) = R_2[f(z), \ldots, \psi(z)] = a_2 \varphi(z) + Q_2[f(z), \ldots, \psi(z)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi(z+\omega) = R_m[f(z), \ldots, \psi(z)] = a_m \psi(z) + Q_m[f(z), \ldots, \psi(z)], \end{cases}$$

où les $Q_1, \ldots, Q_m$ ne possèdent pas de termes du premier degré et où l'on a

$$a = e^{\frac{2\pi\omega}{\omega'}} \qquad (\omega > 0 \text{ puisque } a > 1).$$

La condition initiale qui détermine le cas que nous étudions

$$K(a^p) \neq 0,$$

peut s'écrire

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} a_i \neq a^p \quad \text{ou} \quad a_i \neq e^{\frac{2p\pi\omega}{\omega'}} \\ (i = 1, 2, \ldots, m;\ p = 1, 2, \ldots, n;\ \ldots). \end{cases}$$

Le problème posé est alors ramené au suivant. Montrer que si cette condition ($\alpha$) est réalisée, le système (2) admet une solution *de période $\omega' i$ uniforme et méromorphe dans tout le plan* si les substitutions sont du *type de Crémona*, et dans *un demi-plan seulement* dans le cas contraire.

Nous ferons en premier lieu $f = \varphi = \ldots = \psi = 0$ dans les développements $Q_1, \ldots, Q_m$ (qui sont convergents si $|f|, |\varphi|, \ldots, |\psi|$ sont assez petits). Les fonctions qui constituent la première approximation seront alors des solutions périodiques du système :

$$\begin{gathered} f_0(z+\omega) = a_1 f_0(z), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \psi_0(z+\omega) = a_m \psi_0(z). \end{gathered}$$

Ce sont, en d'autres termes, des fonctions de seconde espèce aux périodes $\omega' i$ et $\omega$, et aux multiplicateurs

$$(1, a_1), \quad (1, a_2), \quad \ldots, \quad (1, a_m).$$

Nous les choisirons de façon à ce qu'elles aient des pôles (les mêmes pour toutes), mais qu'elles restent holomorphes dans une bande $ii'$,

$$-d' < x < d \qquad (d > 0, \; d' > 0),$$

suffisamment petite. Nous désignerons par M le maximum de leurs modules dans cette bande. Comme nous aurons toujours la faculté de multiplier ces fonctions par des facteurs constants arbitraires, nous pourrons supposer M aussi petit qu'il nous plaira.

Pour simplifier nous appellerons *première bande* la bande $Oy$, $AA'$,

$$0 < x < \omega,$$

et *première bande prolongée* la bande $i' i_1$,

$$-d' < x < \omega + d.$$

Les fonctions $f_1, \varphi_1, \ldots, \psi_1$ de seconde approximation seront définies comme solutions des équations

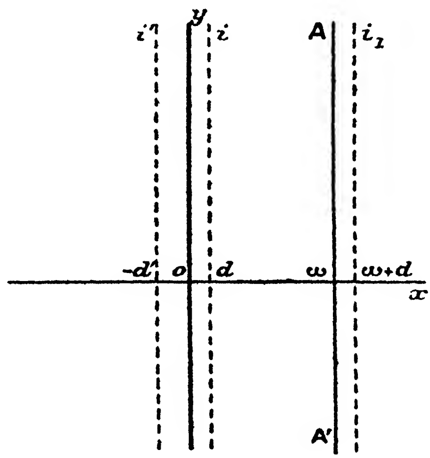
$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f_1(z+\omega) = a_1 \; f_1(z) + \; Q_1[f_0, \varphi_0, \ldots, \psi_0], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \psi_1(z+\omega) = a_m \psi_1(z) + Q_m[f_0, \varphi_0, \ldots, \psi_0]. \end{array} \right.$$

Ces équations sont du type déjà étudié

$$(4) \qquad F(z+\omega) = \mu F(z) + P(z).$$

Nous supposerons M assez petit pour que la série $q(|f_0|, |\varphi_0|, \ldots, |\psi_0|)$, qui majore à la fois toutes les séries $Q_i(f_0, \ldots, \psi_0)$, reste convergente dans la bande $ii'$. Il est alors possible, à une condition cependant, de déterminer des solutions des équations (3) qui soient holomorphes dans

Fig. 57.




la première bande prolongée. L'étude de l'équation (4) avait donné comme condition :

$$\mu \neq \lambda^p \qquad \left(\text{avec } \lambda = e^{\frac{2\pi\omega'}{\omega}}\right).$$

Cette condition devient, avec les notations actuelles,

$$\alpha_i \neq \alpha^p \qquad \text{ou} \qquad \alpha_i \neq e^{\frac{2\pi p\omega'}{\omega}},$$

quels que soient $i$ et $p$. Ce n'est pas autre chose que la condition (2) que nous avons supposée satisfaite.

Soient alors $F_1, \Phi_1, \ldots, \Psi_1$ les fonctions ainsi trouvées : nous prendrons comme fonctions de seconde approximation les fonctions

$$f_1 = f_0 + F_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$\psi_1 = \psi_0 + \Psi_1,$$

qui sont aussi solutions des équations (3) et qui admettent dans la première bande prolongée les mêmes pôles que $f_0, \varphi_0, \ldots, \psi_0$ avec les mêmes résidus.

On a d'ailleurs dans toute la bande $i'$, AA',

$$|F_1| < k.q(M, M, \ldots, M),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|\Psi_1| < k.q(M, M, \ldots, M),$$

$k$ étant une quantité indépendante de M; on peut donc écrire

$$M_1 < k.q(M, M, \ldots, M),$$

$M_1$ étant le maximum des modules des fonctions de première approximation. On voit que $M_1$ sera infiniment petit en même temps que M, $q$ ne contenant que des termes de degré supérieur à 1. On pourra donc faire (en prenant M assez petit) que la série $q(M + M_1, \ldots, M + M_1)$ soit convergente dans la bande $ii'$.

Les fonctions $f_2, \ldots, \psi_2$ de troisième approximation seront alors

$$\begin{aligned} f_2 &= f_0 + F_2, \\ \varphi_2 &= \varphi_0 + \Phi_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \psi_2 &= \psi_0 + \Psi_2, \end{aligned}$$

$F_2, \Phi_2, \ldots, \Psi_2$ étant les solutions des équations

$$F_2(z+\omega) = a_1 F_2(z) + Q_1[f_1, \varphi_1, \ldots, \psi_1] = a_1 F_2(z) + Q_1[f_0 + F_1, \ldots, \psi_0 + \Psi_1],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Psi_2(z+\omega) = a_m \Psi_2(z) + Q_m[f_1, \varphi_1, \ldots, \psi_1] = a_m \Psi_2(z) + Q_m[f_0 + F_1, \ldots, \psi_0 + \Psi_1],$$

holomorphes dans la première bande prolongée.

On pourra, comme plus haut, écrire

$$M_2 < k.q[M + M_1, \ldots, M + M_1]$$

dans toute la bande $i'$, AA'.

Plus généralement, en supposant définies $f_{n-1}, \ldots, \psi_{n-1}$, et si l'on a pris M assez petit pour que $q(M + M_{n-1}, \ldots, M + M_{n-1})$ converge, on aura

$$\begin{aligned} f_n &= f_0 + F_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \psi_n &= \psi_0 + \Psi_n \end{aligned}$$

avec

$$(5)\quad \begin{cases} F_n(z+\omega) = a_1 F_n(z) + Q_1(f_0 + F_{n-1}, \ldots, \psi_0 + \Psi_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Psi_n(z+\omega) = a_m \Psi_n(z) + Q_m(f_0 + F_{n-1}, \ldots, \psi_0 + \Psi_{n-1}). \end{cases}$$

et l'on pourra encore écrire

$$M_n < k.q(M + M_{n-1}, \ldots, M + M_{n-1})$$

dans toute la bande $i'$, $AA'$.

Nous allons voir *que M peut être supposé assez petit pour que $M_n$ reste borné par une quantité fixe, très petite elle-même*. C'est dire que, quel que soit $n$, la série

$$q(M + M_n, \ldots, M + M_n)$$

convergera; il sera donc possible en supposant M suffisamment petit mais différent de zéro de répéter les opérations précédentes une infinité de fois. Nous établirons du même coup que les approximations $F_n$ convergent uniformément, pour $n = \infty$, vers une limite.

Si l'on considère la substitution

$$x' = k.q(M + x, \ldots, M + x) = r(M, x),$$

où M et $x$ ne figurent qu'au second degré, et si l'on pose

$$\begin{aligned} x_1 &= r(M, 0), \\ x_2 &= r(M, x_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n &= r(M, x_{n-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

on aura évidemment, quel que soit $n$,

$$M_n \leq x_n;$$

or si M est très petit, l'équation

$$x = r(M, x)$$

a une racine très petite vers laquelle tendent les $x_n$ tout en lui restant inférieurs (le raisonnement complet a déjà été fait dans une autre occasion). Si $\xi$ désigne cette racine, on aura donc bien

$$M_n < \xi$$

aussi loin qu'on pousse l'approximation.

Il suffira donc bien de prendre $\xi$ (c'est-à-dire M) assez petit pour pouvoir continuer indéfiniment.

Écrivons alors

$$\begin{aligned} (6) \quad & F_n(z + \omega) - F_{n-1}(z + \omega) \\ & = a_1[F_n(z) - F_{n-1}(z)] + Q_1(f_{n-1}, \ldots \psi_{n-1}) - Q_1(f_{n-2}, \ldots \psi_{n-2}). \end{aligned}$$

On a dans la bande $ii'$,

$$|Q_1(f_{n-1}, \ldots, \psi_{n-1}) - Q_1(f_{n-1}, \ldots, \psi_{n-1})| < \lambda . N_{n-1}.$$

$\lambda$ étant une constante indépendante de $n$ et très petite en même temps que M; pour $N_{n-1}$ il représente le maximum des fonctions

$$F_{n-1} - F_{n-2}, \quad \Phi_{n-1} - \Phi_{n-2}, \quad \ldots, \quad \Psi_{n-1} - \Psi_{n-2}$$

dans la première bande. Or l'équation (6) est du type (4) la fonction inconnue étant cette fois $F_n - F_{n-1}$.

On aura donc

$$N_n < k\lambda . N_{n-1}$$

la signification de $N_n$ étant évidente.

Comme $\lambda$ est arbitrairement petit on pourra prendre

$$k\lambda < 1.$$

La série

$$\Sigma(F_n - F_{n-1})$$

est alors absolument et uniformément convergente dans la bande $ii'$, AA, puisqu'elle est majorée par la série géométrique convergente,

$$\Sigma N_1(1 + k\lambda + \ldots + k^n \lambda^n + \ldots).$$

$F_n$ a donc une limite, ainsi d'ailleurs que $\Phi_n, \ldots, \Psi_n$. Appelons F, $\Phi, \ldots, \Psi$ ces limites.

Les fonctions

$$f = f_0 + F, \quad \ldots, \quad \psi = \psi_0 + \Psi$$

sont alors des solutions du système (2), *méromorphes dans la première bande prolongée et non identiquement nulles puisqu'elles admettent les pôles de $f_0, \ldots, \psi_0$ avec les mêmes résidus.*

Si la *substitution* (2) *est quelconque*, on pourra prolonger ces fonctions *dans le demi-plan à droite* au moyen des équations elles-mêmes. Si la substitution *est du type de Crémona*, le prolongement pourra s'effectuer *à gauche*. On obtiendra donc dans ce cas des solutions *uniformes et méromorphes dans tout le plan*, alors que dans le cas général l'uniformité ne peut s'affirmer que dans le demi-plan à droite.

*Remarque I.* — On pourrait se demander pourquoi l'on est parti de fonctions $f_0, \varphi_0, \ldots, \psi_0$ ayant des pôles dans la première bande. La succession des opérations peut toujours se faire si l'on suppose $f_0, \varphi_0, \ldots, \psi_0$ holomorphes; cela revient au fond à confondre les $f$ et les F. On a dans ce cas

$$M_n < k . q(M_{n-1}, \ldots, M_{n-1})$$

avec

$$M_1 < k.q(M, M, \ldots, M).$$

M ne figure plus dans l'équation

$$x = k.q(x, \ldots, x)$$

et la racine $\xi$ qui nous avait servi à raisonner est nulle; les $M_n$ tendent vers zéro si M a été choisi assez petit.

Les solutions que l'on pourrait trouver ainsi seraient donc identiquement nulles.

*Remarque II.* — Si l'on pose

$$f(z) = \lambda(z)\,A(z), \qquad \ldots\ldots \qquad \psi(z) = \lambda(z)\,L(z),$$

$\lambda(z)$ étant une fonction de seconde espèce aux multiplicateurs $(1, k)$ on aura

$$A(z + \omega' i) = A(z),$$

$$A(z + \omega) = \frac{1}{k}\lambda(z)\,f(z + \omega) = \frac{a_1}{k}A(z) \quad P_1[A(z), \ldots, L(z), \lambda(z)]$$

avec les équations analogues pour B, ..., L. Ce sont des équations d'un type analogue à celui des équations (2). La presence de $\lambda(z)$ ne change rien aux raisonnements si l'on suppose que cette fonction ne devient ni nulle ni infinie dans la bande $ii'$. Ces multiplicateurs sont maintenant $\frac{a_1}{k}$ au lieu de $a_1$.

Cette remarque permet de trouver les solutions dans le cas où la condition $(\alpha)$ n'est pas satisfaite — $k$ étant arbitraire, on peut s'arranger pour qu'elle le soit dans les nouvelles equations — *Toute restriction disparaît par conséquent.* Le système (2) admet toujours des solutions transcendantes periodiques, uniformes et méromorphes dans tout le plan.

On peut traiter ainsi l'équation

$$(4) \qquad F(z + \omega) - \mu F(z) = P(z),$$

dans le cas qui avait été exclu où

$$\mu = e^{\frac{2\pi h \omega'}{\omega'}} \qquad (h \text{ entier}).$$

En posant

$$F(z) = \lambda(z)\,A(z),$$

il vient

$$A(z + \omega) = \frac{\mu}{k}A(z) + \frac{P(z)}{k\,\lambda(z)},$$

que l'on pourra résoudre si $\lambda(z)$ n'a pas de zéros dans $ii'$.

*Remarque III*. — Nos fonctions rationnelles R ne contenaient pas $z$. Le cas qui vient d'être examiné montre qu'elles peuvent, sous certaines conditions, contenir une fonction $\mu(z)$ [de période $\omega' i$]; on aurait alors

$$f(z+\omega) = R_1[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z), \mu(z)],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$R_1$ étant toujours de la forme

$$a_1 f(z) + Q_1[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z), \mu(z)].$$

Les fonctions obtenues dans ce paragraphe comme solutions du système (2) sont probablement très particulières malgré leur apparente généralité. Il serait sans doute difficile de caractériser avec précision *toutes* les solutions [1].

**2.** On aurait pu procéder autrement, en introduisant dans les équations (2) un paramètre arbitraire $\mu$. Faisons pour cela la substitution

$$(f, \varphi, \ldots, \psi; \mu f, \mu\varphi, \ldots, \mu\psi).$$

Le système (2) devient

$$(2')\qquad \begin{cases} f(z+\omega) = a_1 f(z) + P_1(f, \varphi, \ldots, \psi, \mu), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi(z+\omega) = a_m \psi(z) + P_m(f, \varphi, \ldots, \psi, \mu). \end{cases}$$

Nous chercherons à le résoudre en prenant pour $f, \varphi, \ldots, \psi$ des séries ordonnées suivant les puissances de $\mu$, à coefficients périodiques de période $\omega' i$,

$$(\mathrm{D})\qquad \begin{cases} f(z) = f_0(z) + \mu f_1(z) + \ldots + \mu^n f_n(z) + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi(z) = \psi_0(z) + \mu \psi_1(z) + \ldots + \mu^n \psi_n(z) + \ldots \end{cases}$$

L'identification dans (2′) donne

$$f_0(z+\omega) = a_1 f_0(z),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\psi_0(z+\omega) = a_m \psi_0(z),$$

puis

$$f_1(z+\omega) = a_1 f_1(z) + P'_1(f_0, \varphi_0, \ldots, \psi_0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\psi_1(z+\omega) = a_m \psi_1(z) + P'_m(f_0, \varphi_0, \ldots, \psi_0),$$

---

[1] *Voir* à ce sujet, pour le cas d'une seule variable, une Note de M. Julia dans les *Comptes rendus*, t. 174, 1922, p. 800.

et plus généralement

$$f_n(z+\omega) = a_1\, f_n(z) + P_1^{(n)}(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1};\ \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1};\ \ldots;\ \psi_0, \ldots, \psi_{n-1}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi_n(z+\omega) = a_m \psi_n(z) + P_m^{(n)}(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1};\ \cdots\cdots\cdots\cdots;\ \psi_0, \ldots, \psi_{n-1})$$

($P_i^n$ n'est qu'une notation pour désigner de nouvelles fonctions); on sait résoudre de telles équations. On peut faire directement, sans beaucoup de peine, la démonstration de la convergence des séries (D) trouvées, si $\mu$ est assez petit (ainsi que $|f_0|, \ldots, |\psi_0|$ dans la bande $ii'$) mais cela est inutile et résulte de la première démonstration où il apparaît que les $f, \varphi, \ldots, \psi$ sont des séries de fonctions holomorphes en $\mu$ (au voisinage de $\mu = 0$), convergentes à la manière d'une progression géométrique. Ce sont donc des fonctions elles-mêmes holomorphes en $\mu$, donc developpables du type D. On ne peut d'ailleurs rien dire de général, lorsque $\mu$ est quelconque, sur la nature de ces fonctions considérées comme fonctions de $\mu$.

3. On peut faire ici quelque chose d'analogue à ce que nous avons fait précédemment lorsque nous cherchions des fonctions entières dont les quotients représentent les solutions méromorphes cherchées.

En faisant la substitution

$$\left(f, \varphi, \ldots, \psi;\ \frac{f}{1+\chi}, \frac{\varphi}{1+\chi}, \ldots, \frac{\psi}{1+\chi}\right)$$

dans les formules (2), on obtiendra les nouvelles équations

$$\frac{f(z+\omega)}{1+\chi(z+\omega)} = \frac{P_1(f, \varphi, \ldots, \chi_1)}{1+P_{m+1}(f, \varphi, \ldots, \psi, \chi)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\psi(z+\omega)}{1+\chi(z+\omega)} = \frac{P_m(f, \varphi, \ldots, \psi, \chi)}{1+P_{m-1}(f, \varphi, \ldots, \psi, \chi)},$$

que l'on pourra satisfaire en prenant

$$(7)\qquad \begin{cases} f(z+\omega) = P_1(f, \varphi, \ldots, \psi, \chi), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \chi(z+\omega) = P_{m+1}(f, \varphi, \ldots, \psi, \chi). \end{cases}$$

Les termes du premier degré dans $P_1, \ldots, P_{m+1}$ pouvant être pris égaux respectivement à

$$a_1 f, \quad a_2\varphi, \quad \ldots, \quad a_m\psi, \quad p\chi,$$

$p$ étant le plus grand degré des polynomes P (tout ce calcul a déjà été fait une fois, c'est pourquoi nous n'insistons pas).

On est ramené, en définitive, à des équations analogues aux équations (2) mais où les seconds membres sont des polynomes.

*On peut dans ce cas exprimer toutes les approximations successives au moyen des transcendantes de la théorie des fonctions elliptiques.*

Prenons les fonctions de seconde approximation données par les équations

$$(8)\qquad \begin{cases} f_1(z+\omega) = a_1\, f_1(z) + Q_1(f_0, \varphi_0, \ldots, \psi_0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_1(z+\omega) = a_m\, f_1(z) + Q_m(f_0, \varphi_0, \ldots, \psi_0), \end{cases}$$

les Q étant des polynomes de degré $p$ sans termes constants.

Nous supposerons que l'on n'a donné aux fonctions $f_0$, $\varphi_0$, ..., $\psi_0$ qu'un seul pôle dans un rectangle de périodes.

On pourra satisfaire à ces équations en prenant pour $f_1$, ..., $\psi_1$ des polynomes de degré $p$ en $f_0$, $\varphi_0$, ..., $\psi_0$ ne renfermant pas de termes du premier degré; les relations (8) détermineront elles-mêmes tous les coefficients de ces polynomes. Il ne pourrait y avoir d'impossibilité que si l'on avait une relation de la forme

$$a_1^{\nu_1} a_2^{\nu_2} \ldots a_m^{\nu_m} = a_i \qquad (\text{les } \nu \text{ étant entiers}),$$

avec

$$\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_m \geqq 2.$$

Au polynome trouvé pour $f_1$ on pourra d'ailleurs ajouter une fonction linéaire arbitraire

$$\alpha_0 f_0(z) + \alpha_1 f_0'(z) + \ldots + \alpha_{p-1} f_0^{(p-1)}(z),$$

sans que la première des relations (8) cesse d'être satisfaite.

On détermine les constantes $\alpha_0$, ..., $\alpha_{p-1}$ de manière que $f_1(z)$ ait pour pôles simples les pôles de $f_0(z)$ situés dans la première bande avec le même résidu. On fait de même pour $\varphi_1$, ..., $\psi_1$.

On continue ainsi les approximations, la démonstration de la convergence se faisant comme dans le cas général.

Le seul point intéressant du calcul est que les approximations sont faites ici avec des transcendantes de la théorie des fonctions elliptiques. Mais on n'obtient pas ici de fonctions entières puisqu'on les astreint à avoir les pôles de $f_0$, $\varphi_0$, ..., $\psi_0$.

4. On pourrait obtenir d'autres solutions des équations (2); ces solu-

tions seraient encore uniformes dans tout le plan mais d'une toute autre nature.

Prenons, pour simplifier l'écriture, le cas de deux équations

$$f(z+\omega) = R[f(z), \varphi(z)] = a f(z) + P[f(z), \varphi(z)],$$
$$\varphi(z+\omega) = S[f(z), \varphi(z)] = b \varphi(z) + Q[f(z), \varphi(z)],$$

où nous supposerons $|a| > 1$ et $|b| > 1$; R et S ne sont d'ailleurs pas forcément birationnelles.

On peut déterminer, nous l'avons vu, des fonctions de deux variables $F(u, v)$, $\Phi(u, v)$ uniformes, holomorphes autour du point : $u = v = 0$ et telles que l'on ait

$$F(au, bv) = R[F(u, v), \Phi(u, v)],$$
$$\Phi(au, bv) = S[F(u, v), \Phi(u, v)].$$

Posons alors

$$f(z) = F[f_0(z), \varphi_0(z)],$$
$$\varphi(z) = \Phi[f_0(z), \varphi_0(z)],$$

$f_0(z)$ et $\varphi_0(z)$ étant deux fonctions arbitraires de seconde espèce aux multiplicateurs $(1, a)$, $(1, b)$ pour les périodes $\omega' i$, $\omega$.

On aura

$$f(z+\omega) = F[a f_0(z), b\varphi_0(z)] = R[F(f_0, \varphi_0), \varphi(f_0, \Phi_0)] = R[f, \varphi],$$
$$\varphi(z+\omega) = \Phi[a f_0(z), b f_0(z)] = S[F(f_0, \varphi_0), \varphi(f_0, \Phi_0)] = S[f, \varphi].$$

Les fonctions $f$ et $\varphi$ ainsi obtenues sont bien uniformes dans tout le plan mais non pas méromorphes car elles admettent *comme points singuliers essentiels les pôles de $f_0(z)$ et $\varphi_0(z)$.*

5. On pourrait essayer (¹) d'étendre les résultats ci-dessus, de manière à obtenir des fonctions de plusieurs variables généralisant les fonctions abéliennes (comme les fonctions trouvées précédemment généralisent les fonctions elliptiques). Des difficultés nouvelles se présentent, de sorte que le problème ainsi posé n'a pas encore reçu de solution.

Prenons le cas très particulier suivant :

*Existe-t-il des fonctions uniformes $f(z, z')$, $\varphi(z, z')$ de deux variables complexes $z$ et $z'$, ayant partout à distance finie le caractère de fonctions rationnelles, admettant la période $2\pi i$ par rapport*

---

(¹) É. PICARD, *Annales de l'École Normale*, 1913 (Mémoire cité).

*à z et à z et telles que*

$$(9)\quad \begin{cases} f(z+\omega, z') = R[f(z, z'), \varphi(z, z')], \\ \varphi(z+\omega, z') = S[f(z, z'), \varphi(z, z')]; \\ f(z, z'+\omega') = R'[f(z, z'), \varphi(z, z')], \\ \varphi(z, z'+\omega') = S'[f(z, z'), \varphi(z, z')]; \end{cases}$$

$\omega$ et $\omega'$ sont ici deux constantes positives, (R, S) et (R′, S′) sont deux substitutions birationnelles qui doivent évidemment être permutables pour que le système ci-dessus soit compatible.

On suppose toujours que l'on a

$$R = a\,f(z, z') + \ldots, \qquad S = b\,\varphi(z, z') + \ldots,$$
$$R' = a'\,f(z, z') + \ldots, \qquad S' = b'\,\varphi(z, z') + \ldots,$$

les termes non écrits étant du second degré.

En suivant la même marche qu'au paragraphe 2, on est conduit à former les systèmes d'équations

$$(10)\quad \begin{cases} f_0(z+\omega, z') = a\,f_0(z, z'), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_p(z+\omega, z') = a\,f_p(z, z') + P_p[f_0, \varphi_0, \ldots, f_{p-1}, \varphi_{p-1}]; \\ \varphi_0(z+\omega, z') = b\,\varphi_0(z, z'), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_p(z+\omega, z') = b\,\varphi_p(z, z') + Q_p[f_0, \varphi_0, \ldots, f_{p-1}, \varphi_{p-1}], \end{cases}$$

et

$$(10')\quad \begin{cases} f_0(z, z'+\omega') = a'\,f_0(z, z'), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_p(z, z'+\omega') = a'\,f_p(z, z') + P'_p[f_0, \varphi_0, \ldots, f_{p-1}, \varphi_{p-1}]; \\ \varphi_0(z, z'+\omega') = b'\,\varphi_0(z, z'), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_p(z, z'+\omega') = b'\,\varphi_p(z, z') + Q'_p[f_0, \varphi_0, \ldots, f_{p-1}, \varphi_{p-1}]. \end{cases}$$

Soit dans le plan des $z$ et dans le plan des $z'$ les premières bandes

$$0 < x < \omega,$$
$$0 < x' < \omega'.$$

Il faudrait, pour appliquer la même analyse que plus haut, pouvoir satisfaire aux équations ci-dessus par des fonctions de période $2\pi i$, holomorphes quand $z$ et $z'$ sont dans les premières bandes des plans correspondants. *Cela n'est pas possible en général*, et l'on ne peut arriver, par cette voie, à prouver l'existence, *qui reste douteuse*, des fonctions satisfaisant aux données du problème. Peut-être y a-t-il là un intéressant sujet de recherches.

On peut au contraire facilement satisfaire aux équations (10) et (10') en prenant pour $f_p$ et $\varphi_p$ des polynomes en $f_0, \varphi_0, \ldots, f_{p-1}, \varphi_{p-1}$; $f_0$ et $\varphi_0$ restent arbitraires; on peut les prendre quadruplement périodiques de seconde espèce. Les fonctions obtenues ainsi possèdent à distance finie des lignes de singularites essentielles qui sont les lignes de singularités polaires des fonctions $f_0$ et $\varphi_0$. Ces fonctions sont d'une toute autre nature que les fonctions abeliennes et ne satisfont pas aux conditions du problème qui reste donc à résoudre.

# CHAPITRE IV.

## L'ÉQUATION D'ABEL.
## UNE APPLICATION DE L'ÉQUATION DE FREDHOLM.

### I. — L'ÉQUATION D'ABEL.

Déjà au Chapitre II nous avons été amenés à nous occuper du problème de l'itération. Nous allons le voir intervenir d'une manière plus effective encore, dans l'étude d'une équation qui n'est pas sans parenté avec celles dont nous nous sommes occupés jusqu'ici.

Il s'agit de l'équation

$$f[\theta(x)] = f(x) + 1 \tag{1}$$

rencontrée déjà par Abel [1].

Dans cette équation, $f$ est la fonction inconnue à déterminer, $\theta$ est une fonction donnée.

Cette équation est d'ailleurs équivalente à l'équation

$$\varphi[\theta(x)] = c\,\varphi(x) \tag{2}$$

étudiée en premier lieu par Schröder [2] et qui porte son nom. Il suffira en effet, pour passer de l'une à l'autre, de poser

$$f(x) = \log_c \varphi(x).$$

Le problème qui consiste à résoudre l'une ou l'autre de ces équations reste évidemment bien vague si l'on ne fait pas d'hypothèses complémentaires; la nature de la fonction $\theta(x)$ y joue d'ailleurs un rôle essentiel. On peut cependant faire les remarques suivantes qui sont à peu près évidentes :

*a. Si $f_1$ et $f_2$ sont deux solutions distinctes de* (1), $f_1 - f_2$ *sera une*

---

(1) ABEL, *Mém. Posth.; Œuvres*, t. II, p. 36 (Christiania, 1881).
(2) SCHRÖDER, *Math. Annalen*, 1871.

*solution de l'équation*

$$f[\theta(x)] = f(x). \tag{3}$$

*b. Si* $\varphi_1$ *et* $\varphi_2$ *sont deux solutions de* (2), $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ *sera solution de la même équation* (3).

Ces deux remarques permettent de donner la solution générale des équations (1) et (2), si l'on en connaît une intégrale particulière et si l'on connaît aussi l'intégrale générale de (3). On trouve d'ailleurs aisément (¹) cette intégrale générale.

M. Kœnigs (²) a pu former, dans un cas intéressant et par un procédé que nous allons exposer, une solution de l'équation de Schröder holomorphe *autour d'un certain point*. L'analyse ainsi faite est purement locale et ne s'étend pas à tout le plan. Les travaux postérieurs sur l'itération, en particulier ceux de M. Fatou (³) et de M. Julia (⁴), permettent cette extension. Nous n'approfondirons pas ces questions dont la complexité apparaîtra déjà sur les cas particuliers que nous allons traiter. Nous ajouterons ensuite quelques indications sur l'itération des fractions rationnelles.

**1.** Soit $\theta(z)$ une fonction holomorphe dans un certain contour simple $c_m$ et supposons que les itérés successifs du point $z$

$$z_1 = \theta(z), \qquad z_2 = \theta_2(z) = \theta(z_1), \qquad \ldots, \qquad z_n = \theta_n(z) = \theta(z_{n-1}),$$

tendent uniformément vers une limite $a$ située dans $c$, lorsque $z$ est lui-même dans $c$. On dit alors que $a$ est un *point attractif*; $a$ satisfait évidemment à la relation

$$\theta(a) = a.$$

De plus on a, comme nous allons le voir,

$$|\theta'(a)| \leqq 1.$$

Posons en effet

$$\theta_p(a) = a + \alpha_p.$$

(¹) Kœnigs, *Sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles* (*Annales de l'École Normale*, 1884, suppl.).

(²) Kœnigs, Mémoire cité et aussi *Annales de l'École Normale*, 1885.

(³) Fatou, Notes aux *Comptes rendus*, 1906, 1917, 1918; *Mémoire sur les équations fonctionnelles* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, 1919, 1920, 1923 et 1924).

(⁴) Julia, *Mémoire sur l'itération des fractions rationnelles* (*Liouville*, 1918; *Comptes rendus*, 1917, 1918, 1919).

Il vient alors

$$a + \alpha_{p+1} = \theta_{p+1}(a) = \theta[a + \alpha_p],$$

d'où

$$\alpha_{p+1} = \alpha_p \theta'_a + \frac{\alpha_p^2}{2} \theta''(a) + \ldots$$

et puisque $\theta_p(a)$ tend vers $a$ pour $p = \infty$

$$\lim_{p=\infty} \frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p} = \theta'(a).$$

*Il est donc bien impossible que le module de $\theta'(a)$ soit supérieur à l'unité;* si cela était, la suite des $\alpha$ serait en effet croissante à partir d'un certain rang et $\alpha_p$ ne pourrait tendre vers zéro.

*En manière de réciproque*, si l'on a

$$(4) \qquad \begin{cases} \theta(a) = a, \\ |\theta'(a)| < 1 \end{cases}$$

(l'égalité étant cette fois exclue), on pourra déterminer un cercle $\Gamma$ de centre $a$, assez petit pour que l'on ait

$$\lim \theta_n(z) = a,$$

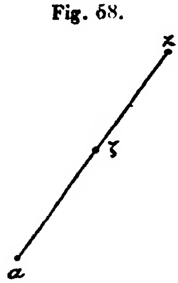
si $z$ reste dans $\Gamma$.

La formule de Darboux (extension au cas de la variable complexe de la formule de Taylor) donne en effet

$$(5) \qquad \theta(Z) - \theta(a) = (Z - a)\theta'(a) + \lambda \frac{(Z - a)^2}{2} \theta''(\zeta)$$

$\lambda$ étant de module inférieur à 1 et $\zeta$ étant situé sur le segment $aZ$. Si Z

Fig. 68.



est intérieur à $\Gamma$ et si M est le module maximum de $\theta''(z)$ dans $\Gamma$, on aura

$$|\theta(Z) - \theta(a)| < |Z - a| \left[ |\theta'(a)| + \frac{M}{2} |Z - a| \right].$$

Si $\Gamma$ est assez petit pour que

$$|\theta'(a)| + \frac{M}{2}|Z - a| < q < 1,$$

en prenant $z$ intérieur à $\Gamma$ et en appliquant cette formule pour

$$Z = z,$$

puis pour

$$Z = z_p \qquad (p = 1, 2, \ldots, n-1),$$

on obtiendra aisément

$$(6) \qquad |z_n - a| < q^n |z - a|$$

et par conséquent

$$\lim_{n=\infty} z_n = a,$$

Ceci posé, considérons, *en supposant toujours* $|\theta'(a)| < 1$ *et de plus* $\theta'(a) \neq 0$, l'expression

$$\frac{\theta_n(z) - a}{|\theta'(a)|^n}$$

et montrons que cette expression a, *pour* $n = \infty$, *une limite non nulle.*

Nous avons en effet, d'après (5),

$$\theta_{n+1}(z) - a = \theta'(a)(z_n - a)\left[1 + \frac{\lambda_n}{2}(z_n - a)\frac{\theta''(\zeta_n)}{\theta'(a)}\right],$$

ce qui peut s'écrire, puisque $\theta'(a)$ n'est pas nul, et en tenant compte de (6),

$$\frac{\theta_{n+1}(z) - a}{\theta'(a)} = [\theta_n(z) - a][1 + \varepsilon_n]$$

avec d'après (6)

$$|\varepsilon_n| < k \cdot q^n,$$

$k$ étant un nombre indépendant de $n$.

On en conclut aisément en remontant à $z - a$

$$\frac{\theta_{n+1}(z) - a}{[\theta'(a)]^{n+1}} = (z - a)(1 + \varepsilon_0)(1 + \varepsilon_1)\ldots(1 + \varepsilon_n),$$

et, la série $\Sigma \varepsilon_n$ étant évidemment convergente,

$$\lim_{n=\infty} \frac{\theta_{n+1}(z) - a}{[\theta'(a)]^{n+1}} = (z - a)\prod_0^\infty (1 + \varepsilon_i).$$

Cette limite est *une fonction* $\varphi(z)$ *holomorphe dans* $\Gamma$, *non identique-*

*ment nulle et s'annulant pour $z = a$.* Elle constitue précisément, la *solution formée par M. Kœnigs, de l'équation de Schröder.*

On a, en effet,

$$\varphi[\theta(z)] = \lim \frac{\theta_n[\theta(z)] - a}{[\theta'(a)]^n} = \lim \frac{\theta_{n+1}(z) - a}{[\theta'(a)]^{n+1}}\,\theta'(a)$$

et par conséquent

$$\varphi[\theta(z)] = \theta'(a)\,\varphi(z).$$

La solution de l'équation d'Abel est alors, d'après ce qui a été dit

$$f(z) = \log_{\theta'(a)} \varphi(z) = \frac{\log \varphi(z)}{\log \theta'(a)},$$

$\varphi(z)$ aurait d'ailleurs pu être trouvée par la méthode des coefficients indeterminés. Cette étude a été faite par M. Grévy et M. Leau.

2. Supposons maintenant que $a$ soit un point non plus *attractif* mais *répulsif*, c'est-à-dire que l'on ait

$$a = \theta(a),$$
$$|\theta'(a)| > 1.$$

On sera conduit, pour rester dans le voisinage de ce point, à considérer la substitution $\theta_{-1}(x)$ inverse de $\theta(x)$, et ses itéres successifs.

Les raisonnements faits plus haut prouvent, pour l'expression

$$\frac{\theta_{-n}(x) - a}{\frac{1}{S^n}} \qquad [S = \theta'(a)].$$

l'existence d'une limite $\varphi(x)$ holomorphe autour de $a$, nulle pour $z = a$ et satisfaisant à la relation

$$\varphi[\theta_{-1}(x)] = \frac{1}{S}\varphi(x)$$

ou bien, en remplaçant $x$ par $\theta(x')$,

$$\varphi[\theta(x)] = S\,\varphi(x).$$

Si $\theta(x)$ est une fonction rationnelle, la fonction inverse de $\varphi$ est une *fonction de Poincaré*. Si l'on pose, en effet,

$$\varphi(x) = u, \qquad x = \chi(u),$$

on a

$$\varphi[\theta(x)] = S u$$
$$\theta(x) = \chi[S u].$$

et enfin

$$\chi(\$u) = \theta[\chi(u)].$$

3. Dans le cas que nous avons laissé de côté jusqu'ici où $\theta'(a)$ est nul, on peut faire des calculs analogues. Le point $a$ est évidemment un point attractif. Supposons, ce qui est le cas général, que l'on ait

$$(7) \qquad \theta(z) - a = c(z-a)^{\alpha}[1 + H(z)(z-a)],$$

$c$ étant une constante, $\alpha$ un entier au moins égal à 2, $H(z)$ une fonction holomorphe dans $\Gamma$. Si M est le module maximum de cette fonction, $r$ le rayon de $\Gamma$, on aura

$$|c(z-a)^{\alpha-1}[1 + H(z)(z-a)]| < |c| r^{\alpha-1}(1 + Mr),$$

quantité qui pourra être prise inférieure à 1 si $r$ est assez petit. On a donc

$$|\theta(z) - a| < q|z-a|.$$

On pourra en conclure comme plus haut

$$(8) \qquad |z_n - a| < q^n |z-a|$$

On peut alors démontrer que l'expression

$$(9) \qquad \frac{\theta_n(z) - a}{c^n(z-a)^{\alpha-1}[\theta(z)-a]^{\alpha-1}\dots[\theta_{n-1}(z)-a]^{\alpha-1}}$$

a pour $n = \infty$ une limite non nulle.

On tire en effet de (7)

$$(10) \qquad \theta_n(z) - a = c[z_{n-1} - a]^{\alpha}[1 - \varepsilon_n]$$

avec

$$\varepsilon_n = H(z)(z_{n-1} - a),$$

et d'après (8)

$$|\varepsilon_n| < K q^{n-1},$$

K étant une quantité indépendante de $n$.

On aura donc

$$\frac{\theta_n(z) - a}{c[z_{n-1} - a]^{\alpha-1}} = (z_{n-1} - a)(1 + \varepsilon_n),$$

et par suite on arrivera, en remontant à $z - a$, à la relation

$$\frac{\theta_n(z) - a}{c^n(z-a)^{\alpha-1}\dots(z_{n-1}-a)^{\alpha-1}} = (z-a)(1+\varepsilon_0)\dots(1+\varepsilon_n).$$

Le premier membre aura donc pour limite une expression

$$\psi(z) = (z-a)\prod_0^\infty (1+\varepsilon_i),$$

*analogue à celle trouvée dans le cas* $\theta'(a) = 0$, *mais satisfaisant cette fois à l'équation fonctionnelle*

$$\psi[\theta(z)] = c.(z-a)^{\alpha-1}\,\psi(z).$$

On peut encore si $\theta'(a)$ est nul montrer que

$$\frac{\alpha^n[\theta_n(z)-a]}{\theta'(z_{n-1})\,\theta'(z_{n-2})\ldots\theta'(z)}$$

a *une limite pour* $n=\infty$, *cette limite satisfaisant à l'équation fonctionnelle*

$$\chi[\theta(z)] = \frac{\theta'(z)}{\alpha}\chi(z).$$

Il suffira pour cela d'écrire en dérivant (10)

$$\theta'(z_{n-1}) = c.\alpha.(z_{n-1}-a)^{\alpha-1}(1+\eta_n)$$

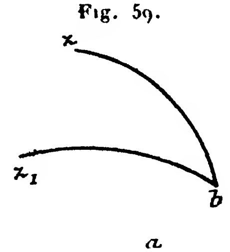
et de montrer la convergence de la série $\Sigma|\eta_n|$.

4. Nous pourrons maintenant, en nous appuyant sur les résultats du paragraphe précédent, résoudre l'équation d'Abel dans le cas où $\theta'(a)$ est nul (ce qui correspond à $\alpha \geqq 2$).

Posons

$$X(z) = \int_b \frac{dz}{\chi(z)} \qquad (b \neq a),$$

Fig. 59.




$\chi$ étant la fonction que nous venons de trouver.

Nous aurons

$$X[\theta(z)] = \int_b^{\theta(z)} \frac{dz}{\chi(z)}$$

et

$$X'(z) = \frac{1}{\chi(z)}.$$

Par conséquent

$$X'[\theta(z)]\theta'(z) = \frac{\theta'(z)}{\chi[\theta(z)]} = \frac{\alpha\,\theta'(z)}{\theta'(z)\chi(z)} = \alpha\,X'(z).$$

En intégrant il vient

$$X[\theta(z)] = \alpha\,X(z) + C.$$

Posons alors

$$\Psi(z) = X(z) + k,$$

$k$ étant une constante. Nous aurons

$$\Psi[\theta(z)] = X[\theta(z)] + k = \alpha\,X(z) + c + k = \alpha[\Phi(z) - k] + c + k$$

Si nous prenons

$$k[1-\alpha] + c = 0,$$

$$k = \frac{c}{1-\alpha},$$

il viendra

$$\Psi[\theta(z)] = \alpha\Psi(z).$$

$\varphi$ est donc une solution de l'équation de Schröder et

$$f = \frac{\log\varphi(z)}{\log\alpha}$$

sera une solution de l'équation d'Abel correspondante.

5. On peut rattacher à cette étude des fonctions qui satisfont à des équations fonctionnelles un peu plus générales que l'équation d'Abel.

Soit $R(z)$ une fonction rationnelle *s'annulant en un point $a$ supposé centre attractif pour $\theta(z)$.*

Formons la série

$$A(z) = R(z) + R[\theta_1(z)] + \ldots + R[\theta_n(z)] + \ldots.$$

Cette série est convergente au voisinage du point $a$, on a en effet, puisque $R(a) = 0$,

$$R[z_n] = R[z_n] - R[a] = \lambda_n(z_n - a)R'[\zeta_n]$$

avec $|\lambda_n| < 1$, $\zeta_n$ étant d'ailleurs très voisin de $a$ si $n$ est assez grand. $R'$ sera borné au moins à partir d'un certain rang; d'autre part, comme nous l'avons vu,

$$|z_n - a| < q^n(z - a);$$

la convergence est évidente.

*Il est clair que la fonction $A(z)$ est solution de l'équation fonctionnelle*

$$A[\theta(z)] = A(z) - R(z).$$

Le développement donné pour $A(z)$ n'est valable qu'au voisinage de $a$. Les circonstances les plus variées, quant à son extension dans des domaines plus étendus, peuvent se rencontrer dans les applications.

Prenons par exemple

$$R(z) = z, \qquad \theta(z) = z^2.$$

Ici, des deux racines o et 1 de l'équation

$$z^2 = z,$$

la première seule est attractive et l'on a

$$a = 0$$

On a

$$A(z) = z + z^2 + z^4 + \ldots + z^{2^n} + \ldots.$$

C'est une série appartenant au type bien connu

$$\sum_n z^{c^n}$$

($c$ étant un entier au moins égal à 2).

*Cette série admet comme coupure la circonférence* $\Gamma$ *de rayon un.* Pour l'établir, montrons que si l'extension analytique de cette fonction était possible le long d'un arc $\alpha\beta$ de $\Gamma$, si petit que soit cet arc, elle serait possible sur toute la circonférence $\Gamma$. Remplaçons dans la série, $z$ par

$$z e^{\frac{2k\pi i}{c^h}} \qquad (h \text{ et } k \text{ entiers});$$

à partir du terme de rang $h$, les termes de la série conservent leurs valeurs et la convergence n'est pas modifiée. On peut choisir $h$ et $k$ de façon à rendre

$$\frac{k}{c^h}$$

aussi voisin que l'on veut d'un nombre donné quelconque.

Par cette substitution, on pourra faire correspondre un point quelconque de $\Gamma$ à un point infiniment voisin de tout autre point du même cercle. Si donc la série était convergente sur un petit intervalle, elle le serait sur tout le cercle; l'extension serait possible sur tout le cercle et le rayon de convergence serait plus grand que un, résultat qui est manifestement absurde. L'exemple précédent peut être généralisé comme suit : $\lambda$ étant une constante inférieure à *un* en module, et $\theta(z)$ une fonction rationnelle conservant le cercle $(z) = 1$ ainsi que chacune des régions $(z) < 1$ et $(z) > 1$ (fonction à cercle fondamental), de manière qu'il existe deux points attractifs, racines de $z = \theta(z)$, symétriques par rapport au centre $(z) = 1$, on démontre que la série $\sum_0^\infty \lambda^n \theta_n(z)$, formée avec les itérées successives de $\theta(z)$, admet aussi le cercle $(z) = 1$ par coupure de Weierstrass (*voir* G. Julia, *C. R. Acad. Sc.*, 23 fév. 1925).

Prenons un autre exemple déjà étudié à un autre point de vue

$$z = \cos u, \qquad Z = \theta(z) = \cos pu \qquad (p \text{ entier});$$

on sait que $\theta(z)$ est un polynome.

Nous poserons en outre

$$R(z) = \frac{1}{z}.$$

Nous aurons alors

$$A(z) = \sum \frac{1}{\cos p^n u}.$$

Posons

$$z = x + iy, \qquad u = v + iw, \qquad z_n = x_n + iy_n = \cos[p^n(v + iw)].$$

Nous en tirons, comme dans un précédent Chapitre,

$$x_n = \cos(p^n v)\operatorname{ch}(p^n w),$$
$$y_n = -\sin(p^n v)\operatorname{sh}(p^n w).$$

Si $z$ est réel et compris entre $-1$ et $+1$, $u$ est réel et la série $A(z)$ ne converge pas, ses termes étant tous supérieurs à un.

Pour toute autre valeur de $z$, on aura $w \neq 0$, $z$ étant complexe.

On a alors, par un calcul facile,

$$x_n^2 + y_n^2 = \frac{1}{4}[e^{2p^n w} + e^{-2p^n w} + 2(\cos^2 p^n v - \sin^2 p^n v)].$$

Si $w$ est positif la série

$$\sum \frac{1}{|\cos p^n u|} = \sum \frac{1}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}}$$

est comparable à $\sum \frac{1}{e^{p^n w}}$ qui converge, et de même si $w < 0$ elle est comparable à $\Sigma e^{p^n w}$ qui converge aussi.

La fonction A sera donc *prolongeable dans tout le plan* en exceptant le segment $-1, +1$ de l'axe réel. D'après ce qui a été dit, elle satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\lambda[\theta(z)] = \lambda(z) - \frac{1}{z}.$$

Considérons encore, pour terminer, la série

$$\mu(z) = R(z) + R(z_1)\theta'_1(z) + \ldots + R(z_n)\theta'_n(z) + \ldots,$$

$R(z)$ étant une fonction rationnelle régulière en $a$.

On a

$$\theta_n(z) = \theta(z_{n-1}) = \theta(a) + (z_{n-1} - a)\theta'(a) + \ldots$$

et par conséquent

$$\theta'_n(z) = \theta'(a)\theta'_{n-1}(z) + \ldots.$$

On en conclut, puisque $|\theta'(a)| < 1$, que l'on a, si $z$ est assez voisin de $a$,

$$|\theta'_n(z)| < q.|\theta'_{n-1}(z)| \qquad (\text{avec } q < 1),$$

et par suite

$$|\theta'_n(z)| < q^n.|\theta'(z)|,$$

R restant bornée au voisinage de $a$, ainsi d'ailleurs que $\theta'(z)$, la convergence de la série est donc assurée au voisinage de $a$.

On a d'autre part

$$\mu[\theta(z)] = R[\theta(z)] + \ldots + R[\theta_{n+1}(z)]\theta'_n[\theta(z)] + \ldots.$$

Or, de

$$\theta_{n+1}(z) = \theta_n[\theta(z)]$$

on tire

$$\theta'_{n+1}(z) = \theta'_n[\theta(z)]\theta'(z),$$

et par conséquent $\mu$ satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\mu[\theta(z)] = \frac{1}{\theta'(z)}[\mu(z) - R(z)].$$

6. Lorsqu'on veut déterminer *dans tout leur domaine d'existence* les solutions des équations fonctionnelles précédemment étudiées, on est conduit à étudier, lorsque $z$ se déplace d'une manière *quelconque* dans tout le domaine d'existence de la fonction $\theta(z)$, et en admettant que, lorsque $z$ décrit ce domaine d'existence, le point $\theta(z)$ ne sorte pas de ce même domaine, la répartition des *conséquents* d'un point $z$, c'est-à-dire de la suite infinie de points $\theta(z), \theta_2(z), \ldots, \theta_n(z), \ldots$ et des *antécédents* de la suite des points $\theta_{-1}(z), \theta_{-2}(z), \theta_{-n}(z), \ldots$ ($\theta_{-n}$ fonc-

tion inverse de $\theta_n$). Nous supposerons dans la suite que $\theta(z)$ est une *fonction rationnelle*, la suite des conséquents $\theta_n$ et celles des antécédents sont alors définies quel que soit $z$. Si $a$ est un point attractif de $\theta(z)$, il est en particulier intéressant de savoir dans quel domaine peut varier $z$ sans que la suite des $\theta_n(z)$ cesse d'avoir pour limite le point $a$. Nous appellerons ce domaine, *domaine total de convergence vers a*.

7. La frontière des divers domaines appartient à un ensemble de points $\mathcal{E}$ qu'on peut ainsi définir. Considérons les racines de l'équation $z = \theta_n(z)$ pour lesquelles $|\theta'_n(z)| < 1$ et cela pour $n = 1, 2, \ldots, \infty$. On a un ensemble infini E de points qui sont des *points ou des cycles répulsifs de* $\theta(z)$. L'ensemble $\mathcal{E}$ est l'ensemble parfait *dérivé de* E c'est-à-dire l'ensemble des points tels qu'au voisinage, si petit soit-il, de chacun d'eux existe une infinité de points de E. Cet ensemble $\mathcal{E}$ contient E. Par exemple, pour $\theta(z) = z^2$, $\mathcal{E}$ se compose de la circonférence $|z| = 1$. Mais il peut être très compliqué. Il peut être un ensemble *parfait discontinu* [par exemple pour $\theta(z) = 2z^k + 1$], ou une courbe fermée de Jordan *dénuée de tangente* mais sans point double $\left[\text{par exemple pour } \theta(z) = \frac{z+z^2}{2}\right]$, ou une courbe continue fermee sur tout arc de laquelle existent *une infinité de points doubles* $\left[\text{par exemple pour } \theta(z) = \frac{-z^3+3z}{2}\right]$; il peut comprendre une infinité de *continus distincts* $\left[\text{par exemple pour } \theta(z) = A\left(\frac{z^5}{5} - 2a\frac{z^4}{4} + a^2\frac{z^3}{3}\right), a \text{ etant un nombre réel positif quelconque et A nombre positif convenable}\right]$; il peut enfin être superficiel et *couvrir tout le plan*

$$\text{ex : } \theta(z) = \left[\frac{(z^2+1)^2}{4z(z^2-1)}\right].$$

Une *propriété caractéristique de tout point de* $\mathcal{E}$, *c'est qu'il est point limite pour les antécédents d'un point quelconque du plan à l'exception de deux points au plus, l'infini compris.*

8. Lorsque l'ensemble $\mathcal{E}$ n'est pas superficiel, il divise le plan en régions et, dans chaque région, toute fonction limite d'une suite partielle $\theta_{n_1}, \theta_{n_2}, \ldots, \theta_{n_p}, \ldots$ *est analytique*. Le nombre de ces régions est *infini s'il n'est égal ni à* 1, *ni à* 2.

Dans l'exemple $\theta(z) = 2z^2 - 1$ [correspondant au cas traité $z = \cos u$, $\theta(z) = \cos 2u$], il y a *une seule région* constituée par tout le plan sauf le segment $(-1, +1)$ de l'axe réel : c'est le domaine total *de convergence vers l'infini;* ici l'ensemble $\mathcal{E}$ c'est le segment $(-1, +1)$.

Dans l'exemple $\theta(z) = z^2$, il y a *deux régions* séparées par le cercle $|z| = 1$ qui constitue l'ensemble $\mathcal{E}$; la première est la région $|z| < 1$ domaine total de convergence vers l'*origine;* la deuxième est la région $|z| > 1$, domaine total de convergence vers *l'infini*. Le caractère simple de cet exemple se retrouve par toute fonction rationnelle $\theta(z)$ qui transforme le cercle $|z| = 1$ en lui-même, chacune des deux régions $|z| < 1$ et $|z| > 1$ étant aussi transformée en elle-même, de manière que dans chacune de ces deux régions existe un point double $z = \theta(z)$ qui est dès lors attractif : ces deux points doubles sont symétriques par rapport au cercle $|z| = 1$.

Dans l'exemple $\theta(z) = \dfrac{-z^3 + 3z}{2}$ il y a une infinité de régions, la courbe continue qui constitue l'ensemble $\mathcal{E}$ ayant alors une infinité de points doubles partout denses sur elle-même. Il n'y a cependant dans l'exemple actuel que trois points attractifs, les points $+1, -1$ et $\infty$.

Chaque point attractif est *intérieur* à une des régions précédentes laquelle est son domaine *immédiat de convergence;* le domaine *total* de convergence, s'il ne se confond pas avec le domaine immédiat, se compose d'une infinité des régions précédentes qui sont les antécédents nécessaires du domaine immédiat. Le point à l'infini a un domaine total de convergence coïncidant avec son domaine immédiat lequel est simplement connexe, sa frontière comprenant tout l'ensemble $\mathcal{E}$. Chacun des points $+1$ et $-1$ a un domaine total de convergence composé d'une infinité d'aires antécédentes du domaine immédiat. Ces aires sont ici *simplement connexes*.

9. Il peut arriver que la connexion d'un domaine immédiat *ne soit pas simple :* elle est alors *d'ordre infini*. C'est le cas pour le domaine immédiat et total du point à l'infini dans l'exemple

$$\theta(z) = A\left[\frac{z^5}{5} - 2a\frac{z^4}{4} + a^2\frac{z^3}{3}\right]$$

précédemment cité : la frontière de ce domaine qui constitue $\mathcal{E}$ comprend une *infinité de continus* distincts deux à deux extérieurs. C'est aussi le cas pour le domaine immédiat et total du point à l'infini dans l'exemple $\theta(z) = 2z^k + 1$. Ici la frontière du domaine qui constitue $\mathcal{E}$, comprend une *infinité de points* formant un ensemble parfait discontinu.

Le *nombre des points ou cycles attractifs* [un cycle attractif est un ensemble de $n$ racines distinctes de $z = \theta_n(z)$ où $|\theta'_n(z)|$ est $< 1$, $n$ est l'ordre du cycle] *d'une fraction rationnelle* $\theta(z)$ *est toujours limité en fonction du degré* de la fraction.

Les propriétés des points ou cycles *indifférents* $\left[\text{où } \theta'_n(z) = e^{\frac{2pi\pi}{q}}\right.$, $p$ et $q$ étant entiers$\left.\right]$ offrent une grande analogie avec celles des points attractifs, au point de vue de la convergence. Mais ces points *appartiennent à l'ensemble* $\mathcal{E}$, tandis que les points attractifs n'appartiennent jamais à $\mathcal{E}$.

Les renseignements qui précèdent n'ont aucune prétention à être complets. Nous les donnons simplement comme un aperçu des particularités du problème de l'itération, en renvoyant, pour une étude plus approfondie de la question, aux remarquables travaux de M. Fatou et de M. Julia précédemment cités.

## II. — SUR L'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES $\Delta V = k^2 V$ ET L'ÉQUATION DE FREDHOLM.

Nous terminerons ces leçons par la recherche de certaines solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad \Delta V = k^2 V \qquad \left(\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right),$$

qui généralise l'équation de Laplace

$$\Delta V = 0.$$

Cette dernière équation se présente, comme on le sait, dans l'étude de la répartition des masses électriques, pour lesquelles la loi de l'attraction est celle de Newton, le potentiel élémentaire étant alors $\frac{1}{r}$.

On peut de même rattacher l'équation (1) au cas où le potentiel serait $\frac{e^{-kr}}{r}$, l'attraction étant alors $-\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right)$ au lieu de $\frac{1}{r^2}$. L'hypothèse d'une telle loi d'attraction a été envisagée déjà par Neumann [1] qui a traité dans ce cas divers problèmes particuliers d'équilibre élec-

---

[1] C. NEUMANN, *Allgemeine Untersuchungen über das Newtonsche Princip der Fernwirkungen mit besonderer Rücksicht auf die elektrischen Wirkungen* (Teubner, 1896).

trique. Cette étude a été reprise plus tard par M. Picard [1] qui a traité le problème général en se servant des propriétés classiques de l'équation de Fredholm. L'étude de l'équation (1) est d'ailleurs plus aisée que celle de l'équation de Laplace; l'hypothèse $k \neq 0$ permet en effet de faire des raisonnements qui ne sont plus valables si $k = 0$. Nous rappellerons brièvement, pour commencer, les résultats classiques sur l'équation de Fredholm [2] et sur les propriétés du potentiel newtonien.

**1.** L'équation de Fredholm est une équation intégrale de la forme

$$(\lambda) \qquad \varphi(x) + \lambda \int_a^b f(x, s)\, \varphi(s)\, ds = \psi(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction inconnue à déterminer pour toute valeur de l'intervalle $(a, b)$; $f(x, y)$, que l'on appelle le *noyau* de l'équation, est supposée bornée et intégrable pour $a < x < b$ et $a < y < b$; $\psi(x)$ est une autre fonction donnée bornée et intégrable dans l'intervalle $(a, b)$.

On peut déterminer $\varphi(x)$ pour des valeurs suffisamment petites de $\lambda$ en procédant par approximations successives ou encore en employant la méthode des coefficients indéterminés. Si l'on pose par exemple

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1 + \ldots + \lambda^n \varphi_n + \ldots,$$

on obtient immédiatement

$$\varphi_0(x) = \psi(x),$$

$$\varphi_1(x) = \int_a^b f(x, s)\, \varphi_0(s)\, ds = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\varphi_n(x) = \int_a^b f(x, s)\, \varphi_{n-1}(s)\, ds = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

on voit que l'on a

$$\varphi_n < \mathrm{M}\, \mathrm{F}^n (b - a)^n,$$

---

(1) É. Picard, *Sur la distribution de l'électricité avec la loi de Neumann et sur le pouvoir refroidissant d'un courant fluide* (*Annales de l'École Normale*, 3e série t. XXV, 1908, p. 585-591); *Sur la distribution de l'électricité avec la loi de Neumann et sur la théorie analytique de la chaleur dans le cas d'un saut brusque de température* (*Rendiconti del Circolo Math. di Palermo*, t. 37, 1914).

(2) On pourra, sur les points classiques de la théorie de l'équation de Fredholm, consulter l'Ouvrage de M. Lalesco, *Introduction à la théorie des équations intégrales* (Hermann, 1912), ou le tome III du *Cours d'Analyse*, de M. E. Goursat (Gauthier-Villars).

en désignant par F et M les maxima des modules de $f$ et $\psi$ dans $(a, b)$. La série $\varphi(x)$ trouvée converge donc uniformément dans $(a, b)$ pourvu que l'on ait

$$\lambda F(b-a) < 1.$$

Si l'on veut étendre la solution à toutes les valeurs de $\lambda$, un autre procédé devient nécessaire. On démontre que $\varphi(x)$ est une fonction méromorphe de $\lambda$ donnée, ayant pour expression

$$\varphi(x) = \psi(x) - \lambda \int_a^b \frac{D_1(x, t)}{D(\lambda)} \psi(t)\, dt, \tag{3}$$

$D(\lambda)$ désigne la série

$$D(\lambda) = 1 + \lambda \int_a^b f(x_1, x_1)\, dx_1 + \frac{\lambda^2}{2!} \int_a^b \int_a^b f\begin{pmatrix} x_1, & x_2 \\ x_1, & x_2 \end{pmatrix} dx_1\, dx_2 + \ldots$$
$$+ \frac{\lambda^n}{n!} \underbrace{\int_a^b \cdots \int^b}_{n \text{ fois}} f\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_n + \ldots$$

et $D_1(\xi, \eta)$ la série

$$D_1(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) + \lambda \int_a^b f\begin{pmatrix} \xi, & x_1 \\ \eta, & x_1 \end{pmatrix} dx_1 + \ldots$$
$$+ \frac{\lambda^n}{n!} \int_a^b \cdots \int_a^b f\begin{pmatrix} \xi, & x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ \eta, & x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_n + \ldots,$$

le symbole $f\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_n \end{pmatrix}$ représentant le déterminant

$$\begin{vmatrix} f(x_1, y_1) & \ldots & f(x_1, y_n) \\ f(x_2, y_1) & \ldots & f(x_2, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ f(x_n, y_1) & \ldots & f(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

L'expression (3) est d'ailleurs l'unique solution de l'équation (2) lorsque $\lambda$ n'est pas un zéro de $D(\lambda)$, c'est-à-dire n'est pas un pôle pour $\varphi(x)$. On appelle *valeur singulière de* $\lambda$ un tel pôle $\lambda_0$. Il est aisé de voir que l'équation sans second membre

$$\Phi(x) + \lambda_0 \int_a^b f(x, s)\, \Phi(s)\, ds = 0 \tag{4}$$

admet des solutions non nulles si $\lambda_0$ est une valeur singulière, $\lambda_0$ étant, en effet, dans ce cas, un pôle de $\varphi(x)$, on a

$$\varphi(x) = \frac{\Phi(x)}{(\lambda - \lambda_0)^\alpha} + \ldots \qquad [\Phi(x) \neq 0].$$

et si l'on substitue ce développement dans (2), l'identification des termes en $(\lambda - \lambda_0)^{-\alpha}$ donne

$$\Phi(x) + \lambda_0 \int_a^b f(x, s)\,\Phi(s)\,ds = 0.$$

L'équation (4) a donc bien une solution au moins; elle peut même avoir un système de $p$ solutions

$$\Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \ldots, \quad \Phi_p,$$

qui soient linéairement indépendantes. Une forme linéaire quelconque en $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$ sera évidemment elle-même une solution.

Si dans l'équation (2) de Fredholm on change $f(x, y)$ en $f(y, x)$, on obtient *l'équation associée.* D'après la définition même de $D(\lambda)$ les valeurs singulières sont les mêmes pour deux équations associées. On peut aussi montrer que l'équation associée sans second membre admet le même nombre $p$ de solutions linéairement indépendantes que l'équation (4). Nous désignerons ces $p$ solutions par

$$\Psi_1, \quad \Psi_2, \quad \ldots, \quad \Psi_p.$$

L'équation (2) n'a en général pas de solutions si $\lambda = \lambda_0$. Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il y ait des solutions, sont que la fonction $\psi$ second membre de (2) soit orthogonale aux fonctions $\Psi_i$ que nous venons de définir, c'est-à-dire que l'on ait

$$\int_a^b \Psi_i(x)\,\psi(x)\,dx = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

On peut généraliser cette théorie pour un nombre quelconque de variables. Par exemple pour deux variables l'équation de Fredholm est

$$\varphi(x, y) + \lambda \int\int_A f(x, y;\, u, v)\,\varphi(u, v)\,du\,dv = \psi(x, y).$$

A étant une aire dans laquelle $f$ et $\psi$ restent bornées, $\varphi$ étant à déterminer. Si P est le point de coordonnées $x, y$; Q le point de coordonnées $u, v$; on écrit symboliquement

$$f(x, y;\, u, v) = F(P, Q).$$

On écrit alors l'équation

$$(5) \qquad \Phi(P)+\lambda\int\int_A F(P, Q)\Phi(Q)\,d\sigma=\Psi(Q),$$

$d\sigma$ étant l'élément de surface dans le plan des variables $u$, $v$.

Le terme général de $D(\lambda)$ est alors

$$\frac{\lambda^n}{n!}\underbrace{\int\int_A\cdots\int\int_A}_{n \text{ fois}} f\begin{pmatrix}P_1, \ldots & P_n\\ P_1, \ldots & P_n\end{pmatrix} d\sigma_1\,d\sigma_2\ldots\,d\sigma_n$$

avec

$$f\begin{pmatrix}P_1, \ldots & P_n\\ Q_1, \ldots, & Q_n\end{pmatrix}=\|F(P_i, Q_j)\|$$

et

$$d\sigma_i=dx_i\,dy_i.$$

La suite se généralise de façon analogue.

2. Dans l'étude des potentiels, qui va suivre, les notations auront les significations habituelles suivantes :

Pour les potentiels de volume, un point $(a, b, c)$ est un point quelconque des masses attirantes, $\rho(a, b, c)$ est la densité en ce point.

Pour les potentiels de surfaces, $d\sigma$ est un élément de la surface attirante autour du point $p$; $\rho_p$ est la densité superficielle en $p$: $m(x, y, z)$ est le point pour lequel on veut étudier le potentiel; $\varphi$ est l'angle de $mp$ avec la normale à $d\sigma$; enfin, si $m$ est sur la surface, $\psi$ est l'angle de $mp$ avec la normale à la surface au point $m$; $mn$ est cette normale.

Ceci rappelé, si les masses attirantes sont réparties *dans un domaine* D *de l'espace à trois dimensions*, on a en $m(x, y, z)$ un *potentiel de volume*

$$V(x, y, z)=\int\int\int_D\frac{\rho(a, b, c)\,da\,db\,dc}{r}$$

$$\left[\text{avec } r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}\right].$$

Ce potentiel satisfait à l'une des deux équations de Laplace ou de Poisson

$$\Delta V=0 \qquad \text{ou} \qquad \Delta V=-4\pi\rho(x, y, z),$$

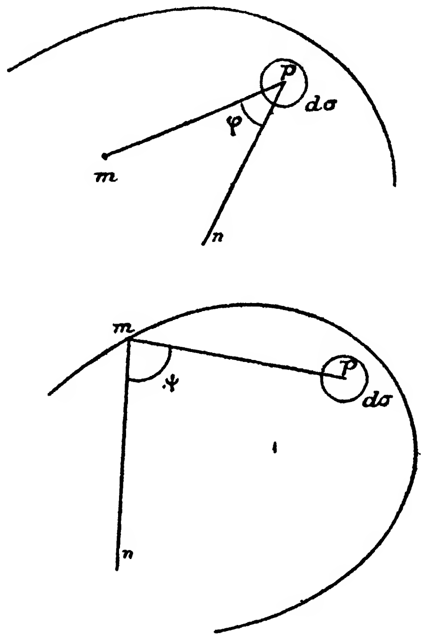
suivant que $m$ n'appartient pas ou appartient aux masses attirantes. Il est continu ainsi que ses dérivées premières en tout point de l'espace; les dérivées secondes sont continues sauf sur la surface de séparation.

Si les masses sont réparties sur *une surface simple* S, on obtient un potentiel de *simple couche*

$$V(x, y, z) = \int\int_S \frac{\rho\, d\sigma}{r}.$$

On démontre que V est continu en tout point de l'espace, même sur la surface.

Fig. 60.




Supposons la surface fermée et soit $m$ un point de la surface, soient $i$ et $e$ deux points voisins de $m$, situés sur $mn$ l'un à l'intérieur, l'autre à l'extérieur de S. Les derivées de V en ces deux points prises suivant la direction de la normale *intérieure* $mn$, tendent vers les limites respectives

$$\frac{dV}{dn}, \quad \frac{dV'}{dn},$$

lorsque l'on fait tendre $i$ et $e$ vers $m$; on montre que ces deux dérivées limites satisfont aux relations

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dV}{dn} + \dfrac{dV'}{dn}\right) = \displaystyle\int\int_S \rho \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds, \\[2ex] \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dV'}{dn} - \dfrac{dV}{dn}\right) = 2\pi\rho_m. \end{cases}$$

Si, en dernier lieu, les masses sont réparties sur un *feuillet*, on obtient un potentiel de *double couche*

$$W = \iint \rho_p \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} d\sigma = \iint \rho_p \frac{\cos\varphi}{r^2} d\sigma.$$

Ce potentiel est discontinu en tout point $s$ de la surface.

Si $i$ et $e$ sont deux points voisins de $s$ l'un intérieur, l'autre extérieur à S, les potentiels en $i$ et $e$ ont, si l'on fait tendre $i$ et $e$ vers $s$, les limites respectives $W_i$ et $W_e$.

En appelant $W_s$ le potentiel en $s$ on démontre les relations

$$W_e = W_s - 2\pi\rho_s,$$
$$W_i = W_s + 2\pi\rho_s.$$

3. Étudions maintenant ces trois sortes de potentiels avec la loi d'attraction de Neumann, c'est-à-dire à la loi correspondant à l'expression $\frac{e^{-kr}}{r}$ au lieu de $\frac{1}{r}$, $k$ étant une constante positive.

Le potentiel de volume est cette fois

$$V(x, y, z) = \iiint_D \rho(a, b, c) \frac{e^{-kr}}{r} da\, db\, dc,$$

le potentiel élémentaire $\frac{e^{-kr}}{r}$ satisfait (comme on peut aisément le voir) à la relation

$$\Delta V = k^2 V,$$

il en résulte que si le point $m$ est extérieur aux masses attirantes, on a aussi

$$(\alpha) \qquad \Delta V(x, y, z) = k^2 V(x, y, z).$$

Cherchons ce que devient cette équation quand $m$ appartient au domaine D. Pour cela considérons autour du point $m$ un petit volume (une sphère $\Sigma$ de centre $m$, par exemple et de rayon assez petit pour qu'elle soit contenue entièrement dans D). Nous appellerons $D_1$ et $D_2$ les deux portions de D séparées par cette sphère, $D_2$ étant la portion qui contient $m$ à son intérieur. En désignant par $V_1$ et $V_2$ les potentiels provenant de ces deux domaines, nous aurons

$$V = V_1 + V_2, \qquad \Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2;$$

or

$$\Delta V_1 = k^2 V_1.$$

puisque $m$ est extérieur à $D_1$; d'autre part,

$$V_2 = \int\int\int_{D_2} \frac{\rho}{r}\, da\, db\, dc + \int\int\int_{D_2} \left(-k + \frac{k^2 r}{2!} + \ldots\right) \rho\, da\, db\, dc.$$

La première intégrale (appelons-la $W_1$) n'est autre qu'un potentiel newtonien; on a donc

$$\Delta W_1 = -4\pi\rho_m.$$

Pour la seconde, $W_2$, on voit très aisément que $\Delta W_2$ est infiniment petit avec le rayon de la sphère $\Sigma$. On aura donc finalement, en faisant tendre ce rayon vers zéro,

$$\Delta V = k^2 V - 4\pi\rho(x, y, z). \tag{3}$$

Les équations $(\alpha)$ et $(\beta)$ remplacent respectivement l'équation de Laplace et celle de Poisson relatives au potentiel newtonien.

Aucune difficulté spéciale ne se présente dans l'étude du potentiel de *simple couche* :

$$V = \int\int_S \rho_p \frac{e^{-kr}}{r}\, d\sigma.$$

Dans les formules qui donnent les dérivées normales en un point de la surface, on se bornera à remplacer $\frac{1}{r^2}$ par $-\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right)$.

Enfin on aura pour le potentiel de *double couche*

$$W = \int\int_S \frac{d}{dn}\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right) \rho_p\, d\sigma = \int\int_S -\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right) \cos\varphi . \rho_p\, d\sigma,$$

en tenant compte de ce que

$$\cos\varphi = -\frac{dr}{dn}.$$

On trouve encore, comme dans le cas du potentiel newtonien,

$$W_i = W_s + 2\pi\rho_s,$$
$$W_e = W_s - 2\pi\rho_s.$$

Cette étude préliminaire étant terminée, *nous allons maintenant nous poser divers problèmes sur l'équation*

$$\Delta V = k^2 V. \tag{1}$$

4. Nous étudierons en premier lieu le *problème de Dirichlet* :

*Étant donnée sur une surface fermée* S, *une fonction de point* $U_s$

*continue et bornée, chercher s'il existe une solution de* (1) *uniforme et continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres à l'intérieur de* S *et égale sur la surface à la fonction* $U_s$.

Nous établirons d'abord que (comme pour l'équation de Laplace) il est impossible que ce problème *admette deux solutions distinctes*. Il nous suffira évidemment de montrer que si $U_s$ est identiquement nulle, il n'y a pas d'autre solution que zéro. Une solution non nulle admettrait, en effet, à l'intérieur de S soit un maximum positif, soit un minimum négatif. Cela est impossible, car on aurait par exemple en un maximum positif

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \leqq 0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \leqq 0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial^2 y} \leqq 0 \qquad (V > 0),$$

ce qui est incompatible avec l'équation (1).

Nous allons voir maintenant qu'il existe effectivement une solution que l'on peut considérer comme un potentiel de double couche produit par des masses réparties sur la surface S, la densité étant $\rho_s$ au point $s$. Tout revient à montrer que l'on peut déterminer sur la surface, la fonction de point $\rho_s$, de manière qu'il en soit bien ainsi. $U_s$ sera alors la fonction vers laquelle tend le potentiel en question lorsqu'on s'approche de la surface par l'intérieur; c'est ce que nous avions appelé $W_i$. En un point $s$ le potentiel $W_s$ a pour expression

$$W_s = \int\int_S f(r) \cos\varphi . \rho_p \, d\sigma.$$

$f(r)$ étant la fonction $-\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{e^{-kr}}{r}\right)$ des points $s$ et $p$.

On a

$$W_i = W_s + 2\pi\rho_s,$$

c'est-à-dire

$$(7) \qquad \rho_s + \frac{1}{2\pi}\int\int_S f(r) \cos\varphi . \rho_p \, d\sigma = \frac{1}{2\pi} U_s.$$

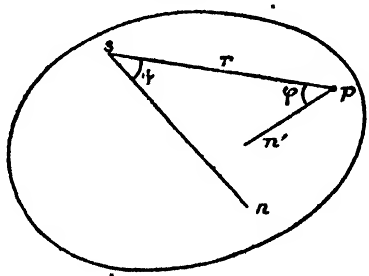
On est donc conduit à envisager l'équation de Fredholm

$$(8) \qquad \rho_s - \frac{\lambda}{2\pi}\int\int_S f(r) \cos\varphi . \rho_p \, d\sigma = \frac{U_s}{2\pi},$$

qui est du type de l'équation (5). Nous avons vu que la solution de cette équation peut se développer en série suivant les puissances de $\lambda$, pourvu que $\lambda$ soit assez petit. La valeur de $\lambda$ qui nous intéresse est $-1$. Il nous suffira donc de faire voir que les valeurs singulières de $\lambda$ pou l'équation (8) sont de module supérieur à *un* pour pouvoir résoudre le problème par ce développement en série et nous éviter de recourir aux formules compliquées de Fredholm. Les raisonnements que nous allons faire ne sont d'ailleurs valables que pour $k \neq 0$, et la simplication introduite ne peut donc pas s'étendre à l'équation de Laplace qui correspond à $k = 0$. Nous montrerons en premier lieu que les valeurs singulières de $\lambda$ sont toutes réelles, nous verrons ensuite qu'elles sont bien, en valeur absolue, supérieures à l'unité.

Nous raisonnèrons (ce qui revient au même) sur l'équation associée de (8). Il faut, pour l'obtenir, intervertir dans le noyau $f(r)\cos\varphi$, les

Fig 61.




points $s$ et $p$. Il n'y a aucun changement pour $r$ et $\varphi$ devient $\psi$ comme on le voit sur la figure. L'équation associée est donc

$$\rho_s - \frac{\lambda}{2\pi}\int\int f(r)\cos\psi\ \rho_p\, d\sigma = \frac{U_s}{2\pi}.$$

Soit $\lambda_0$ une valeur singulière; on pourra obtenir au moins une fonction $\rho_s$ non nulle et satisfaisant à l'équation

$$\rho_s - \frac{\lambda_0}{2\pi}\int\int f(r)\cos\psi . \rho_p d\sigma = 0.$$

Considérons alors le potentiel V que produisait cette densité répartie en simple couche sur la surface; il a pour expression

$$V = \int\int \frac{e^{-kr}}{r}\rho_p\, d\sigma.$$

Les relations qui au paragraphe 3 donnent $\frac{dV}{dn}$ et $\frac{dV'}{dn}$, deviennent alors

$$\frac{dV'}{dn} - \frac{dV}{dn} = 4\pi\rho_s,$$

$$\frac{dV'}{dn} + \frac{dV}{dn} = 2\int\int f(r)\rho_p \cos\psi\, d\sigma = \frac{4\pi\rho_s}{\lambda_0},$$

c'est-à-dire

$$\frac{dV'}{dn} - \frac{dV}{dn} = \lambda_0\left[\frac{dV'}{dn} + \frac{dV}{dn}\right]. \tag{9}$$

Supposons que $\lambda_0$ soit complexe et posons

$$\lambda_0 = \alpha + i\beta \qquad (\beta \neq 0).$$

V et V' seront alors complexes et nous poserons

$$V = V_1 + iV_2, \qquad V' = V'_1 + iV'_2.$$

Sur la surface, on a d'ailleurs

$$V = V',$$

c'est-à-dire

$$V_1 = V'_1 \quad \text{et} \quad V_2 = V'_2.$$

L'équation (9) donne, en égalant les parties réelles et les parties imaginaires

$$\frac{dV'_1}{dn} - \frac{dV_1}{dn} = \alpha\left[\frac{dV'_1}{dn} + \frac{dV_1}{dn}\right] - \beta\left[\frac{dV'_2}{dn} + \frac{dV_2}{dn}\right] \tag{10}$$

$$\frac{dV'_2}{dn} - \frac{dV_2}{dn} = \alpha\left[\frac{dV'_2}{dn} + \frac{dV_2}{dn}\right] + \beta\left[\frac{dV'_1}{dn} + \frac{dV_1}{dn}\right]. \tag{10'}$$

Multiplions (10) par $V_2$, (10)' par $V_1$ et retranchons, nous obtiendrons aisément après avoir intégré sur la surface

$$\begin{aligned} -\beta\Big[ &\int\!\!\int V_2 \frac{dV_2}{dn}\,d\sigma + \int\!\!\int V_1 \frac{dV_1}{dn}\,d\sigma \\ &+ \int\!\!\int V_2 \frac{dV'_2}{dn}\,d\sigma + \int\!\!\int V'_1 \frac{dV'_1}{dn}\,d\sigma\Big] = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

$\beta$ étant différent de zéro, la quantité entre crochets devra être nulle ([1]). Multiplions maintenant (10) par $V_1$ et (10)' par $V_2$, ajoutons-les et intégrons sur la surface S. Il vient alors

$$\begin{aligned} (1-\alpha)&\left[\int\!\!\int V_1 \frac{dV_1}{dn}\,d\sigma + \int\!\!\int V_2 \frac{dV_2}{dn}\,d\sigma\right] \\ = (1+\alpha)&\left[\int\!\!\int V_1 \frac{dV'_1}{dn}\,d\sigma + \int\!\!\int V_2 \frac{dV'_2}{dn}\,d\sigma\right]. \end{aligned} \tag{11'}$$

---

([1]) La formule de Green donne en effet

$$\int\!\!\int\left(V_2\frac{dV_1}{dn} - V_1\frac{dV_2}{dn}\right)d\sigma = \int\!\!\int\!\!\int(V_1\Delta V_2 - V_2\Delta V_1)\,dv = \int\!\!\int\!\!\int(kV_1V_2 - kV_2V_1)\,dv = 0.$$

$\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$ étant différent de $-1$, on déduit de (11) et de (11′),

$$(12)\quad \begin{cases} \displaystyle\int\int V_1 \frac{dV_1}{dn}\, d\sigma + \int\int V_2 \frac{dV_2}{dn}\, d\sigma = 0 \\ \displaystyle\int\int V'_1 \frac{dV'_1}{dn}\, d\sigma + \int\int V'_2 \frac{dV'_2}{dn}\, d\sigma = 0. \end{cases}$$

On a, d'après les formules préliminaires de Green,

$$(13)\quad \int\int U \frac{dU}{dn}\, d\sigma = -\int\int\int \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + k^2 U^2\right] dx\, dy\, dz,$$

U pouvant représenter l'une quelconque des quatre fonctions $V_1$, $V_2$, $V'_1$, $V'_2$. Il en résulte que dans les équations (12), les deux termes de chacun des premiers membres ont même signe; on en conclut

$$\int\int V_1 \frac{dV_1}{dn} - \int\int V_2 \frac{dV_2}{dn} = \int\int V'_1 \frac{dV_3}{dn} = \int\int V'_2 \frac{dV_4}{dn} = 0$$

ce qui, d'après (13), ne peut avoir lieu que si

$$V_1 = V_2 = V'_1 = V'_2 = 0,$$

alors

$$\rho_s = \left(\frac{dV'}{dn} - \frac{dV}{dn}\right) \frac{1}{4\pi} = 0.$$

Il y a contradiction. Nous sommes donc assurés que $\lambda_0$ est un nombre réel.

L'équation (9) peut s'écrire

$$V \frac{dV'}{dn}\, d\sigma - V \frac{dV}{dn}\, d\sigma = \lambda_0 \left[V' \frac{dV'}{dn}\, d\sigma + V \frac{dV}{dn}\, d\sigma\right],$$

ce qui, en intégrant sur la surface, donne pour $\lambda_0$ la valeur

$$\lambda_0 = \frac{\displaystyle\int\int V' \frac{dV'}{dn}\, d\sigma - \int\int V \frac{dV}{dn}\, d\sigma}{\displaystyle\int\int V' \frac{dV'}{dn}\, d\sigma + \int\int V \frac{dV}{dn}\, d\sigma},$$

puisque l'on a sur la surface

$$V = V'.$$

Dans la formule (13), l'intégrale est étendue à l'intérieur ou à l'extérieur de S suivant qu'il s'agit de V ou de V′. Cette intégrale est positive dans un cas, négative dans l'autre et l'on a

$$\int\int_S V \frac{dV}{dn}\, d\sigma < 0, \qquad \int\int_S V' \frac{dV'}{dn}\, d\sigma > 0.$$

Il en résulte

$$|\lambda_0| > 1.$$

L'égalité ne serait possible que si l'une des deux intégrales envisagées était nulle. Soit par exemple

$$\int\int V\frac{dV}{dn}\,d\sigma = 0.$$

Il en résulte d'après (13), que V est identiquement nul à l'intérieur de la surface et par conséquent aussi sur la surface. Ceci entraîne

$$\int\int V'\frac{dV'}{dn} = 0,$$

puisque $V = V'$ sur la surface, de sorte que $V'$ serait nul à l'extérieur; $\rho$ serait encore identiquement nulle ce qui est contradictoire avec notre hypothèse. On a *donc bien* $|\lambda| > 1$ et la solution du problème s'obtient en faisant $\lambda = -1$ dans la série solution de l'équation (8).

Ces raisonnements, basés sur ce que U doit être nul si l'on veut que le second membre de l'équation (13),

$$\int\int\int\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \quad k^2 U^2\right] dx\,dy\,dz,$$

soit nul, ne s'appliquent plus si $k = 0$. Dans ce cas d'ailleurs $\lambda = 1$ est une valeur singulière. L'équation

$$\rho_s - \frac{\lambda}{2\pi}\int\int\frac{\cos\varphi}{r^2}\rho_p\,d\sigma = 0$$

admet en effet pour $\lambda = 1$ la solution non nulle

$$\rho = \text{const}.$$

Le cercle de convergence est alors le cercle de rayon *un*. On ne peut pas faire $\lambda = -1$.

5. Le *problème de Neumann* conduit à une équation de Fredholm analogue. On *se donne cette fois sur la surface* $\frac{dV}{dn}$ et non plus V. Contrairement à ce qui se passe pour l'équation de Laplace, $\frac{dV}{dn}$ peut être prise quelconque sans qu'il soit nécessaire de la soumettre à la condition restrictive

$$\int\int_S \frac{dV}{dn}\,d\sigma = 0$$

On obtient immédiatement l'équation

$$\rho_s - \frac{1}{2\pi}\int\int f(r)\rho_p \cos\psi \, d\sigma = \frac{1}{2\pi}\frac{dV}{dn}$$

qui est au fond une équation associée à la précédente. Les valeurs singulières de $\lambda$ restant les mêmes, tout ce que nous avons dit reste valable.

6. Nous examinerons enfin, *le problème de la distribution de l'électricité en équilibre sur un conducteur* C, *contenant une charge donnée sous l'influence de masses électriques fixes connues.* Nous supposons toujours, bien entendu, que l'on remplace

$$\frac{1}{r^2} \quad \text{par} \quad f(r) = -\frac{d}{dr}\left[\frac{e^{-kr}}{r}\right].$$

Il sera nécessaire de distinguer sur le conducteur une distribution superficielle avec la densité superficielle $\rho_1$, et une distribution en volume avec la densité $\rho_2$. Soit en un point $(x, y, z)$, U le potentiel dû aux masses fixes, $V_1$ le potentiel dû à la couche superficielle, $V_2$ le potentiel relatif aux masses réparties en volume. Le potentiel résultant sera

$$V = V_1 + V_2 + U.$$

Les masses étant en équilibre, le potentiel V à l'intérieur du conducteur devra être constant. On a d'ailleurs à l'intérieur de ce conducteur :

$$\Delta V_1 = k^2 V_1, \qquad \Delta V_2 = k^2 V_2 - 4\pi\rho_2, \qquad \Delta U = k^2 U,$$
$$\Delta V = k^2 V - 4\pi\rho_2.$$

Le potentiel étant constant, on a nécessairement

$$\rho_2 = \text{const.} = \frac{k^2 V}{4\pi}.$$

De plus $\frac{dV}{dn}$ est nulle sur toute la surface du conducteur,

$$\frac{dV_1}{dn} + \frac{dV_2}{dn} + \frac{dU}{dn} = 0,$$

ce qui donne

$$(14) \qquad -2\pi\rho_{1,s} + \int\int f(r)\cos\psi . \rho_{1,p} \, d\sigma + \frac{dV_2}{dn} + \frac{dU}{dn} = 0,$$

$\frac{dV_2}{dn}$ est d'ailleurs une fonction connue de $s$ multipliée par le facteur, jusqu'ici indéterminé $\rho_2$; quant à $\frac{dU}{dn}$ c'est une fonction connue dépendant uniquement des masses fixes.

L'équation (14) n'est autre que l'équation intégrale déjà rencontrée dans le problème de Neumann. La solution contiendra la constante $\rho_2$ jusqu'à présent indéterminée et sera de la forme

$$\rho_1 = A_s\rho_2 + B_s,$$

$A_s$ provenant de $\frac{dV_2}{dn}$ ne dépend pas des masses électriques extérieures, et $B_s$ provient uniquement des masses fixes données.

Montrons que si l'on prend pour $\rho_2$ une constante arbitraire et pour $\rho_1$ la solution correspondante de (14), on obtient bien sur le conducteur, un équilibre électrique. Soit en effet, V le potentiel correspondant à ces densités; on a bien sur la surface

$$\frac{dV}{dn} = 0,$$

puisque l'équation (14) est satisfaite.

Posons alors

$$k^2 V - 4\pi\rho_2 = W.$$

Nous avons

$$\Delta W = k^2 \Delta V, \qquad \Delta V = k^2 V - 4\pi\rho_2$$

et par conséquent

$$\Delta^2 W = k^2 W.$$

D'autre part

$$\frac{dW}{dn} = k^2 \frac{dV}{dn} = 0.$$

La formule (13) montre que si $\frac{dW}{dn} = 0$, la fonction W est nulle à l'intérieur; on a donc

$$W = 0, \qquad V = \frac{4\pi}{k^2}\rho_2.$$

Il y a donc bien équilibre, le potentiel étant d'ailleurs lié à la densité par la relation

$$k^2 V = 4\pi\rho_2.$$

Achevons maintenant de résoudre le problème en déterminant $\rho_2$. Nous écrivons pour cela que le conducteur contient une charge donnée Q. L'équation donnant $\rho_2$ s'écrit immédiatement

$$\rho_2\left[K + \int\int A_p\, d\sigma\right] + \int\int B_p\, d\sigma = Q$$

K étant le volume du conducteur.

Cette équation détermine bien $\rho_2$ si toutefois le coefficient de $\rho_2$ n'est pas nul.

Remarquons que $A_s$ et K sont tout à fait indépendants des masses extérieures. Supposons qu'il n'y ait pas de telles masses; $B_s$ est alors identiquement nul. Dans ces conditions, si

$$K + \int\int A_p \, d\sigma$$

était nul, on pourrait, en prenant $\rho_2$ arbitrairement, associer à la charge de volume une charge superficielle telle que Q soit nul et que le tout soit en équilibre sur le conducteur, aucune influence extérieure n'agissant. Le potentiel total est ici

$$V = V_1 + V_2,$$

avec à l'intérieur de S

$$k^2 V - 4\pi\rho_2 = 0.$$

et à l'extérieur

$$\Delta V = k^2 V.$$

Supposons pour fixer les idées que $\rho_2$ soit positif; V sera alors positif sur la surface.

On a d'ailleurs

$$\frac{dV'_1}{dn} - \frac{dV_1}{dn} = 4\pi\rho_{1,s},$$

$$\frac{dV'_2}{dn} - \frac{dV_2}{dn} = 0.$$

puisque $V_2$ est un potentiel de volume.

Il en résulte

$$\frac{dV'}{dn} - \frac{dV}{dn} = 4\pi\rho_{1,s}$$

et

$$\frac{dV'}{dn} = 4\pi\rho_{1,s},$$

puisque V est constant à l'intérieur.

Or, V étant positif sur la surface et s'annulant à l'infini, V est donc croissant lorsqu'on s'approche de la surface, et l'on a

$$\frac{dV'}{dn} \geqq 0,$$

$\rho_{1,s}$ est alors positif ou nul, et la masse électrique Q ne peut être nulle puisqu'on a aussi supposé $\rho_2$ positif.

L'hypothèse

$$\int\int A_p \, d\sigma + K = 0$$

entraîne donc contradiction et l'on a

$$c_p = \frac{Q - \int\int B_p \, d\sigma}{K \int\int A_p \, d\sigma},$$

ce qui résout entièrement le probleme.

FIN.

# TABLE DES MATIÈRES.

## CHAPITRE III.

### ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES. FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES DE PREMIÈRE ET SECONDE ESPÈCE. TRANSCENDANTES DE M. PICARD.

## CHAPITRE IV.

### L'ÉQUATION D'ABEL. UNE APPLICATION DE L'ÉQUATION DE FREDHOLM.



FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

Reproduction photomécanique J. & R. SENNAC
1557

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |